

Vježba 3.14: Elastičnost folije¹

Na osnovu mjerenja sile potrebne kako bismo spljoštili cijev dobivenu savijanjem elastične folije određuje se Youngova modul elastičnosti materijala od kojeg je folija načinjena.

Uvod

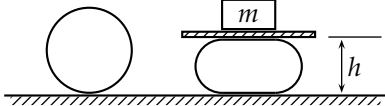
Savijemo li elastičnu foliju tako da ona čini plašt valjka njena se vanjska površina rasteže, a unutarnja površina se sažima, pri čemu su relativne deformacije obrnuto razmjerne polumjeru valjka, odnosno polumjeru zakrivljenosti plohe R . Kako je gustoća elastične energije razmjerna kvadratu relativne deformacije, slijedi da se površinska gustoća elastične energije folije savijene s polumjerom zakrivljenosti R može napisati kao

$$\sigma = \frac{E}{S} = \frac{\kappa}{2R^2}. \quad (1)$$

Konstanta κ koja opisuje otpor koji dana folija pruža savijanju razmjerna trećoj potenciji debljine folije d te Youngovu modulu Y materijala od kojeg je načinjena, a ovisi i o Poissonovu omjeru μ materijala,

$$\kappa = \frac{Yd^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (2)$$

Zanima nas izračunati silu potrebnu da se foliju koja je početno savijena tako čini cijev (plašt valjka) duljine L i polumjera R_0 sabije (spljošti) između dvije paralelne ravnine razmaknute $h < 2R_0$. Poprečni presjek cijevi pritom poprima oblik koji ćemo aproksimirati oblikom "atlet-ske staze", odnosno dvjema polukružnicama polumjera $R = h/2$ te dvjema ravnim segmentima:²



Obzirom da elastičnoj energiji doprinose isključivo zakrivljeni dijelovi cijevi, u okviru gornje aproksimacije možemo pisati

$$E = S\sigma = 2R\pi L\sigma = 2\pi\kappa \frac{L}{h}. \quad (3)$$

Jakost sile kojom moramo djelovati kako bismo sabili cijev slijedi iz derivacije potencijalne energije u smjeru djelovanja sile,

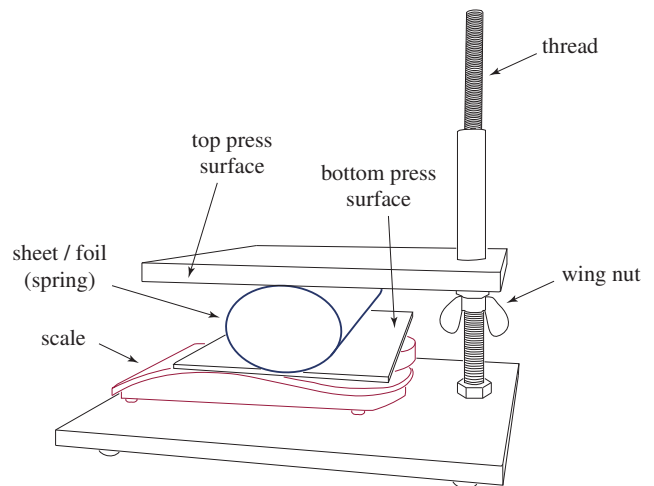
$$F[h] = \left| \frac{d}{dh} E[h] \right| = 2\pi\kappa \frac{L}{h^2}, \quad (4)$$

gdje prepoznamo silu razmjernu recipročnom kvadratu udaljenosti među ravninama.

Uređaj

Uređaj nalikuje "preši". Pod njenom se donjom pločom nalazi vaga, dok je gornja ploča preše pomična. Uz dovoljno

visoko podignutu gornju ploču, elastičnu cijev polažemo na donju ploču preše. Vagu baždaramo tako da u tom položaju pokazuje $m = 0$ g. Navojni vijak i leptir-matica omogućuju kontrolirano spuštanje gornje ploče u malim koracima (jedan puni okret (360°) leptir-matice odgovara vertikalnom pomaku od $\Delta h = 2$ mm). Kada se gornja ploča počne spuštati, postupno dolazi do sve veće deformacije elastične cijevi, a vaga pokazuje masu m koja odgovara sili pritiska $F = mg$ na cijev ($g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$).



Zadatak

Na osnovu niza mjerenja sile F (odn. mase m) i razmaka među pločama preše h pri sabijanju cijevi načinjene od elastične folije odrediti Youngov modul elastičnosti materijala od kojeg je folija načinjena:

- Izmjeriti debljinu d folije te saviti foliju u cijev duljine L .
- Izmjeriti silu F_i (odn. masu m_i) potrebnu za sabijanje cijevi za niz vrijednosti h_i , $i = 1, \dots, N$.
- Mjerenja prikazati grafički tako da je h^2 na uspravnoj, a m^{-1} na vodoravnoj osi te označiti područje linearosti, t.j. valjanosti aproksimacije (3).
- U području linearnosti, metodom najmanjih kvadrata³ odrediti koeficijent smjera $2\pi\kappa L/g$ te na osnovu njega odrediti konstantu κ .
- Na osnovu relacije (2) te uz pretpostavku $\mu = 1/3$ odrediti Youngov modul elastičnosti Y .

Detaljne upute za rad s uređajem nalaze se u laboratoriju.

¹Ova vježba preuzeta je s 41. Fizičke olimpijade održane u Zagrebu srpnja 2010. g.

²Kompletna analiza ovog problema: Antonio Šiber i Hrvoje Buljan, "Theoretical and experimental analysis of a thin elastic cylindrical tube acting as a non-Hookean spring", Phys. Rev. E **83** (2011) 067601 (preprint: <http://arxiv.org/abs/1007.4699>)

³Može se koristiti alat <http://sail.zpf.fer.hr/sdmt>