Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu
Zavod za primijenjenu fiziku

Laboratorijske vježbe iz fizike lasera

Lahorija Bistričić i Saša Ilijić

Upute za izvođenje laboratorijskih vježbi uz kolegij "Fizika lasera"

Radna verzija: 6. travnja 2010.

Elektronički zapis ovog priručnika i računalna podrška dostupni su putem
http://sail.zpf.fer.hr/laserlab

Sadržaj

Vježba 1

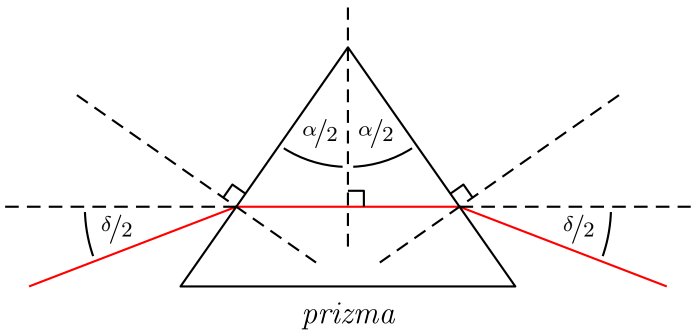
Određivanje indeksa loma

Prolaskom kroz optičku prizmu laserski snop se otklanja od izvornog smjera širenja. Pronalazimo orijentaciju prizme pri kojoj je kut otklona najmanji mogući te na osnovu mjerenja tog kuta i poznatog vršnog kuta prizme određujemo indeks loma sredstva od kojeg je prizma načinjena.

1.1 Uvod: indeks loma i optička prizma

Optička prizma je tijelo omeđeno dvjema ravninama koje zatvaraju tzv. *vršni kut* prizme α. Prizma se izrađuje se od materijala koji je proziran za valnu duljinu svjetlosti koja će njome prolaziti i čiji je indeks loma n veći od indeksa loma okoline u kojoj će se prizma nalaziti. Optičke prizme se koriste u spektrografima (disperzija svjetlosti) te za vođenje svjetlosnih snopova u periskopima, dalekozorima, fotografskim aparatima i sl. (totalna refleksija unutar prizme.)

Indeks loma sredstva od kojeg je načinjena prizma može se jednostavno odrediti s pomoću laserskog snopa. Padne li laserski snop na ravninu prizme on će ući u prizmu i nastavit će se njome širiti. Ako snop zatim padne na sljedeću ravninu prizme pod kutom manjim od $\arcsin(1/n)$, on će izaći iz prizme. Kut koji zatvara smjer širenja izlaznog snopa sa smjerom širenja ulaznog snopa nazivamo *kutom otklona* i označavamo ga s δ. Kut otklona, općenito, ovisi o kutu pod kojim ulazna zraka pada na ravninu prizme. Međutim, može se pokazati da je kut otklona najmanji kada je prolaz zrake prizmom "simetričan," tj. kada ulazna zraka s okomicom na ulaznu ravninu prizme i izlazna zraka s okomicom na izlaznu ravninu prizme zatvaraju jednaki kut. Kut otklona pri simetričnom prolazu zrake prizmom nazivamo



Slika 1.1: Simetričan prolaz zrake svjetlosti optičkom prizmom daje najmanji kut otklona izlazne u odnosu na ulaznu zraku, $\delta = \delta_{\text{min}}$.

kutom minimalnog otklona i označavamo ga s δ_{min}, pri čemu vrijedi izraz

$$\frac{\sin(\alpha/2 + \delta_{\text{min}}/2)}{\sin(\alpha/2)} = n, \tag{1.1}$$

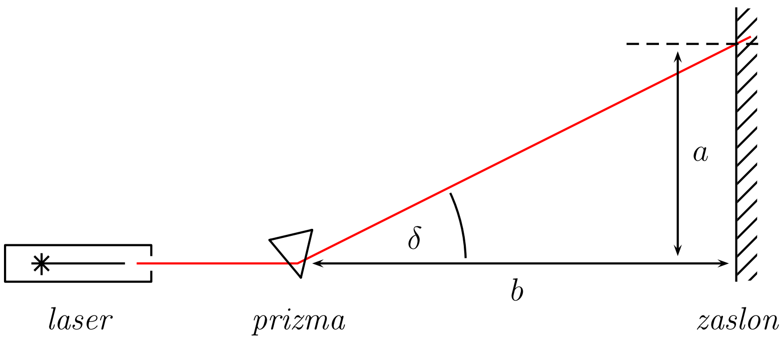
gdje je δ_{min} kut minimalnog otklona, α lomni kut prizme, a n je indeks loma materijala od kojeg je prizma načinjena (pretpostavljamo da se prizma nalazi u zraku, odnosno u sredstvu indeksa loma jednakog jedinici). Dakle, izmjerimo li kut minimalnog otklona δ_{min} za prizmu poznatog lomnog kuta α, pomoću relacije (1.1) možemo odrediti indeks loma materijala n. Indeks loma određen na ovaj način odnosi isključivo na valnu duljinu korištenog laserskog snopa. Korištenjem lasera različitih valnih duljina može se ispitati i ovisnost indeksa loma materijala o valnoj duljini.

1.2 Mjerni uređaj

Mjerni uređaj za mjerenje kuta najmanjeg otklona sastoji se od (Sl. 1.2):

- He-Ne lasera valne duljine 632.8 nm [i poluvodičkog lasera zelene boje],
- podloge po kojoj možemo slobodno pomicati prizmu i
- zaslona.

Laser mora biti postavljen tako da laserski snop, kada prizma nije prisutna, pogađa zaslon pod pravim kutom. Kada laserski snop prolazi prizmom dolazi do otklona snopa koji pogađa zaslon na udaljenosti a od mjesta gdje bi ga pogodio bez prizme. Okrečući prizmu možemo pronaći položaj u kojemu je udaljenost a najmanja. Taj položaj prizme kutu najmanjeg otkloa snopa,



Slika 1.2: Mjerni uređaj (pogled odozgo): Kut otklona $\delta = \mathrm{arctg}(a/b)$.

odnosno simetričnom prolazu snopa kroz prizmu Ako je a_{min} najmanja udaljenost a, a b je udaljenost osi postolja s prizmom od zaslona, kut najmanjeg otklona je

$$\delta_{\mathrm{min}} = \mathrm{arctg}(a_{\mathrm{min}}/b) \ . \tag{1.2}$$

Napomenimo da će mjerenja biti preciznija te raspršenje snopa najmanje ako se snop propušta kroz prizmu pri njenom bridu, tj. tamo gdje je prizma tanka.

1.3 Zadatak

Potrebno je izmjeriti kut najmanjeg otklona za niz prizmi načinjenih od različitih materijala, najprije za crvenu svjetlost He-Ne lasera, a zatim i za zelenu svjetlost poluvodičkog lasera. Prizme su redom:

1. Prizma od krunskog stakla (oznaka 23/1), $\alpha = 60°$,
2. Prizma od flinta (oznaka 23/2), $\alpha = 60°$,
3. Prizma od teškog flinta (malena prizma), $\alpha = 60°$,
4. Prizma od običnog stakla (oznaka 'S'), $\alpha = 45°$.

Zatim treba izmjeriti kut najmanjeg otklona za prizmatične posude kojima su stijenke načinjene od planparalelnih ploča optičkog stakla, a u kojima se nalaze tekućine. Posude su redom:

1. Posuda s vodom (manja posuda), $\alpha = 60°$,
2. Posuda s esterom cimetne kiseline (veća posuda), $\alpha = 60°$.

Konačno treba odrediti indeks loma stakala od kojih su prizme napravljene te indeks loma tekućina u prizmatičnim posudama kako za crvenu svjetlost, tako i za zelenu svjetlost.

1.4 Obrada mjerenja

Indeks loma n određujemo na osnovu mjerenja udaljenosti $a_{\rm min}$ i b s pomoću relacija (1.1) i (1.2). Njih ovdje zbog jednostavnosti pišemo bez sufiksa 'min':

$$n = \frac{\sin(\alpha/2 + \delta/2)}{\sin(\alpha/2)} \qquad \text{i} \qquad \delta = \mathrm{arctg}(a/b) \ , \tag{1.3}$$

gdje je δ kut najmanjeg otklona, a α je vršni kut prizme za koji pretpostavljamo da je poznat s potpunom točnošću. Izmjerene vrijednosti duljina a i b uzimamo kao očekivane vrijednosti $\hat{a}$ i $\hat{b}$, a maksimalne apsolutne pogreške Δa i Δb obično procjenjujemo kao $\Delta a = \Delta b = 0.5$ cm. Očekivana vrijednost kuta najmanjeg otklona je

$$\hat{\delta} = \mathrm{arctg}(\hat{a}/\hat{b}), \tag{1.4}$$

a maksimalna apsolutna pogreška kuta najmanjeg otklona je prema izrazu (B.8)

$$\Delta\delta = \left|\frac{\partial\delta}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial\delta}{\partial b}\right| \Delta b = \frac{\cos^2\hat{\delta}}{\hat{b}}(\Delta a + \Delta b \tan\hat{\delta}). \tag{1.5}$$

Očekivana vrijednost indeksa loma je

$$\hat{n} = \frac{\sin(\alpha/2 + \hat{\delta}/2)}{\sin(\alpha/2)}, \tag{1.6}$$

a maksimalna apsolutna pogreška, prema (B.8),

$$\Delta n = \left|\frac{\partial n}{\partial\delta}\right| \Delta\delta = \frac{\cos(\alpha/2 + \hat{\delta}/2)}{2\sin(\alpha/2)}\, \Delta\delta. \tag{1.7}$$

Konačni rezultat pišemo u obliku $n = \hat{n} \pm \Delta n$.

Vježba 2

Određivanje koeficijenta apsorpcije otopine

Laserski snop propuštamo kroz niz prozirnih posuda napunjenih najprije vodom, a zatim tekućinom nepoznatog koeficijenta apsorpcije. Mjerimo relativno smanjenje intenziteta snopa zbog apsorpcije u tekućini. Uočavamo eksponencijalni pad snage snopa s duljinom puta koji snop prevaljuje u tekućini te određujemo koeficijent apsorpcije tekućine.

2.1 Uvod: apsorpcija svjetlosti

Kada se snop laserske svjetlosti širi nekim sredstvom dolazi do raspršenja snopa i do apsorpcije energije zračenja. Kada razmatranje ograničimo na sredstva u kojima je raspršenje zanemarivo u usporedbi s apsorpcijom, jednostavnu fizikalnu sliku apsorpcije pruža Lorentzov model atoma [1, 2].

Jakost električnog polja ravnog elektromagnetskog vala frekvencije ω, odnosno valne duljine $\lambda = 2\pi c/\omega$ u vakuumu, koji se širi sredstvom indeksa loma n u smjeru x osi, opisujemo poznatim izrazom

$$E(x,t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,(n\,x/c-t)}\,, \tag{2.1}$$

gdje je c brzina svjetlosti, a E_0 je općenito kompleksna amplituda. U Lorentzovu modelu atoma, indeks loma je kompleksan broj. Pišemo

$$n = n_\mathrm{r} + \mathrm{i}\,n_\mathrm{i}\,, \tag{2.2}$$

gdje su n_r i n_i realna i imaginarna komponenta indeksa loma. Uvrštavanjem kompleksnog indeksa loma (2.2) u izraz za električno polje (2.1) dobit ćemo

$$E(x,t) = E_0\,\mathrm{e}^{-\omega\,n_\mathrm{i}\,x/c}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,(n_\mathrm{r}\,x/c-t)}\,. \tag{2.3}$$

Imaginarna komponenta indeksa loma pojavljuje se u prvom eksponencijalnom faktoru koji opisuje atenuaciju elektromagnetskog vala u sredstvu. Realna komponenta indeksa loma pojavljuje se u drugom po redu eksponencijalnom faktoru koji opisuje titranje i određuje brzinu širenja c/n_r, te valnu duljinu $\lambda' = \lambda/n_\mathrm{r}$ elektromagnetskog vala u sredstvu.

Intenzitet elektromagnetskog zračenja razmjeran je u vremenu usrednjenom kvadratu amplitude električnog polja. Možemo pisati

$$I(x) \;\propto\; |E(x,t)|^2 \;=\; |E_0|^2\,\mathrm{e}^{-2\,\omega\, n_\mathrm{i}\, x/c}\;, \tag{2.4}$$

odnosno,

$$I(x) \;=\; I_0\,\mathrm{e}^{-2\,\omega\, n_\mathrm{i}\, x/c} \;\equiv\; I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x}\;, \tag{2.5}$$

gdje smo uveli *koeficijent apsorpcije* α. Intenzitet zračenja eksponencijalno opada s udaljenošću u sredstvu. Ukupna snaga laserskog snopa jest integral intenziteta zračenja preko površine poprečnog presijeka snopa. Stoga i ukupna snaga laserskog snopa eksponencijalno opada s udaljenošću,

$$P(x) \;=\; P_0\,\mathrm{e}^{-\alpha\, x}. \tag{2.6}$$

Relacija koja povezuje imaginarnu komponentu indeksa loma n_i i koeficijent apsorpcije α je dakle

$$n_\mathrm{i} \;=\; \frac{\alpha\, c}{2\,\omega} \;=\; \frac{\alpha\,\lambda}{4\,\pi}, \tag{2.7}$$

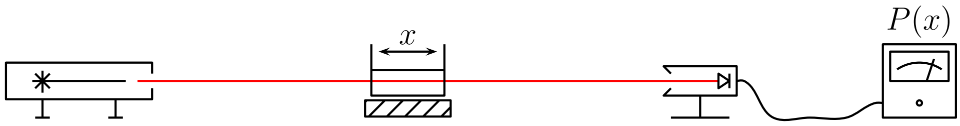
gdje su ω i λ frekvencija i vakuumska valna duljina elektromagnetskog vala.

Koeficijent apsorpcije ovisi o vrsti materijala. Na primjer, za crvenu svjetlost u kvarcnom staklu je malen i iznosi oko 10^{-5} cm^{-1}, dok je u zasićenoj otopini bakar (II)-sulfata velik i iznosi oko 4 cm^{-1}. Za pojedini materijal koeficijent apsorpcije može snažno ovisiti o valnoj duljini svjetlosti. Spomenuta otopina bakar (II)-sulfata jak je apsorber za valnu duljinu 700 nm, a gotovo je transparentna za valnu duljinu 350 nm. U ovoj vježbi koristit će se vodena otopina anilinske boje (anilin – $C_6\,H_5\,NH_2$) poznate kao nigrozin koja uz zanemarivo raspršenje snažno apsorbira vidljivu svjetlost. Nigrozin se koristi se u medicini i u tekstilnoj industriji. Treba izbjegavati dodir s kožom i očima.

Laser je kao izvor dobro kolimiranog snopa monokromatske svjetlosti vrlo prikladan za ispitivanje apsorpcijskih svojstava materijala. Mjerenje apsorpcijskog koeficijenta materijala jedna je od mnogih primjena lasera u laboratoriju.

2.2 Mjerni uređaj

Mjerni uređaj, prilkazan na Sl. 2.1, sastoji se od:



Slika 2.1: Mjerni uređaj: prema (2.6) koeficijent apsorpcije uzorka u kiveti $\alpha = \ln(P(0)/P(x))/x$.

- He-Ne lasera valne duljine $\lambda = 632.8\,\mathrm{nm}$ u vakuumu,
- poluvodičkog detektora i uređaja za mjerenje snage laserskog snopa
- te niza jednakih kiveta duljine $x_1 = 1\,\mathrm{cm}$ napunjenih destiliranom vodom te niza istih takvih kiveta napunjenih vodenom otopinom nigrozina.

Laserski snop usmjeren je izravno u detektor, a u prostoru između lasera i detektora možemo smjestiti kivete. Čistoća kiveta pri mjerenju je od velike važnosti. Otisci prstiju ili kapljice na vanjskoj strani stijenke mogu u potpunosti pokvariti mjerenje.

2.3 Zadatak

Cilj je odrediti koeficijent apsorpcije i imaginarni dio indeksa loma otopine nigrozina. Potrebno je obaviti sljedeća mjerenja:

1. Izmjeriti snagu laserskog snopa $P_j^{(\mathrm{voda})}$ koji je prošao kroz jednu ($j = 1$), zatim kroz dvije ($j = 2$), pa sve do osam ($j = 8$) kiveta punjenih destiliranom vodom.
2. Isti niz mjerenja obaviti s kivetama punjenim otopinom nigrozina, $P_j^{(\mathrm{nig.})}$, $j = 1, \ldots, 8$.

Koeficijent apsorpcije može se odrediti iz omjera snage snopa koji prošao kroz j kiveta s otopinom nigrozina i onih s destiliranom vodom na osnovu relacije

$$P_j^{(\mathrm{nig.})}/P_j^{(\mathrm{voda})} = \mathrm{e}^{-jx_1\alpha_j}. \tag{2.8}$$

Imaginarni dio indeksa loma računa se iz relacije (2.7).

2.4 Obrada mjerenja

Koeficijent apsorpcije nigrozina možemo odrediti iz svakog para mjerenja $(P_j^{(\mathrm{voda})}, P_j^{(\mathrm{nig.})})$, $j = 1, \ldots, 8$. Očekivana vrijednost je

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{jx_1} \ln\left(P_j^{(\mathrm{voda})}/P_j^{(\mathrm{nig.})}\right), \tag{2.9}$$

a maksimalna apsolutna pogreška je, na osnovu (B.8),

$$\Delta\alpha_j = \frac{1}{jx_1}\left(\frac{\Delta P_j^{(\mathrm{voda})}}{P_j^{(\mathrm{voda})}} + \frac{\Delta P_j^{(\mathrm{nig.})}}{P_j^{(\mathrm{nig.})}}\right). \tag{2.10}$$

Očekujemo podudarne vrijednosti kod svih parova ($j = 1, \ldots, 8$), a najmanju maksimalnu apsolutnu pogrešku očekujemo pri $j \simeq 1/\alpha x_1$.

Drugi način obrade rezultata jest primjena metode najmanjih kvadrata na čitav skup mjerenja. Uvodimo veličinu

$$z(x) = P^{(\mathrm{nig.})}(x)/P^{(\mathrm{voda})}(x), \tag{2.11}$$

gdje je x duljina puta prevaljena u otopini nigrozina, odnosno u vodi. Uz pretpostavku da je apsorpcija u vodi zanemariva očekujemo ovisnost oblika

$$z(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}, \tag{2.12}$$

gdje je α apsorpcijski koeficijent otopine nigrozina. Gornja relacija predstavlja matematički model koji nije linearan u parametru α čiju vrijednost želimo odrediti. Međutim, logaritmiramo li gornji izraz dolazimo do linearnog matematičkom modela,

$$y(x) = \ln z(x) = -\alpha x. \tag{2.13}$$

Raspolažemo mjerenjima

$$y_j = \ln z_j = \ln(P_j^{(\mathrm{nig.})}/P_j^{(\mathrm{voda})}) \tag{2.14}$$

koja odgovaraju duljini puta $x_j = jx_1$.

$$x_j = jx_1, \qquad j = 1, \ldots, 8, \tag{2.15}$$

gdje je x_1 duljina jedne kivete. Očekivanu vrijednost parametra α i odgovarajuću pogrešku sada je lako odrediti primjenom metode najmanjih kvadrata. Račun se može provesti s pomoću alata SDMT (vidi odjeljak B.4.3). (Valja napomenuti da smo koristeći ovakav postupak, zbog jednostavnosti, prešutno prihvatili pretpostavku da su procijenjene pogreške pri određivanju vrijednosti y_j međusobno jednake. Ta pretpostavka nije u potpunosti u skladu s prirodom mjerog uređaja. Korektniji račun može se provesti izravnom primjenom nelinearnog modela, vidi *Mathematica* program `fit_beamabs.nb` dostupan na web stranici kolegija.)

Vježba 3

Određivanje polumjera laserskog snopa

Pomoću zaslona s mikrometarskim pomakom mjeri se polumjer laserskog snopa.

3.1 Uvod: Gaussov snop

Laser koji titra u temeljnom poprečnom modu (TEM_{00}) proizvodi snop elektromagnetskog zračenja s radijalnom raspodjelom intenziteta u obliku funkcije Gaussova zvona, vidi Sl. 3.1. Takav se snop u optici naziva Gaussovim snopom (engl. *Gaussian beam*) [2]. Njegovo važno svojstvo jest da se on, fokusiramo li ga optičkim elementima poput prizme ili ogledala, pretvara u novi Gaussov snop, određen novim skupom parametara.

Intenzitet zračenja Gaussovog snopa u ravnini okomitoj na smjer širenja, ovdje neka je to z os, opisan je izrazom

$$I(r,z) = \frac{2P_0}{\pi w^2(z)}\,\mathrm{e}^{-2r^2/w^2(z)}, \tag{3.1}$$

gdje je r udaljenost od osi, P_0 je ukupna snaga, a $w(z)$ je parametar koji zovemo polumjerom snopa (engl. *spot size*). Ovisnost polumjera snopa $w(z)$ o položaju dana je izrazom

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{\lambda\, z}{\pi\, w_0^2}\right)^2}, \tag{3.2}$$

gdje je w_0 polumjer snopa na njegovom najužem mjestu, $z = 0$, a λ je valjna duljina zračenja. Veličina $2w_0$ se često naziva strukom laserskog snopa (engl. *waist*). Na udaljenostima od struka snopa koje su znatno veće od tzv. Raileighovog raspona, $z_\mathrm{R} = \pi w_0^2/\lambda$, kut divergencije Gaussovog snopa definiramo kao

$$\Theta = \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{3.3}$$

Kod dobro kolimiranog laserskog snopa, kut divergencije snopa izuzetno je malen, te ovisnost polumjera snopa o položaju često možemo zanemariti.

Propustimo li Gaussov snop polumjera w kroz kružni otvor polumjera R, snaga zračenja koja će proći otvorom dana je izrazom

$$P_R = \int_0^R I(r,z)\, 2r\pi\, \mathrm{d}r = P_0\,(1 - \mathrm{e}^{-2R^2/w^2}), \tag{3.4}$$

tako da se, npr., unutar polumjera $R = w$, nalazi 86.5 %, a unutar polumjera $R = 2w$, 99.97 % ukupne snage snopa. Ako, s druge strane, neprozirnim zaslonom ravnog ruba (engl. *knife edge*) zaklonimo dio snopa, snaga koja preostaje u snopu dana je izrazom

$$P_h = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_h^{\infty} \mathrm{d}y\; I(\sqrt{x^2+y^2}, z) = \frac{P_0}{2}\Big(1 - \mathrm{erf}\big(\frac{\sqrt{2}\,h}{w}\big)\Big), \tag{3.5}$$

gdje je h udaljenost ruba zaslona od osi snopa, a $\mathrm{erf}\, x$ je tzv. error funkcija [5] definirana izrazom

$$\mathrm{erf}\, x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t, \tag{3.6}$$

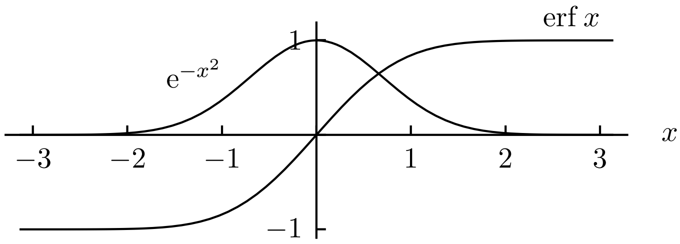
vidi Sl. 3.1. Kod mjerenja polumjera snopa zaslonom ravnog ruba, od praktične je važnosti izraz koji povezuje polumjer snopa i razmak između položaja zaslona koji propušta 30 % i položaja koji propušta 70 % ukupne snage Gaussovog snopa,

$$w = 1.90694\, \big|h_{0.3} - h_{0.7}\big| \tag{3.7}$$

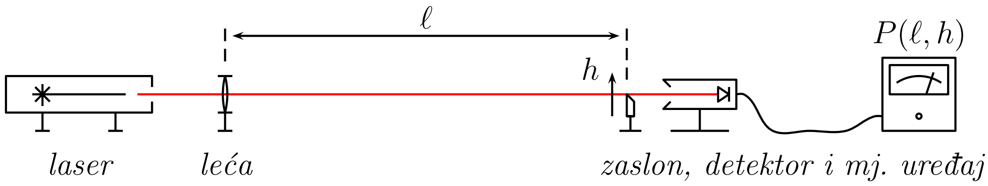
gdje je w polumjer snopa. Taj se izraz zove "formula 0.3/0.7". Analogna "formula 0.1/0.9" glasi $w = 0.780304\,|h_{0.1} - h_{0.9}|$.

3.2 Mjerni uređaj

Na jednom kraju optičke klupe pričvršćen je He-Ne laser, a na klizaču se nalazi detektor s pomičnim zaslonom. Detektor je spojen na uređaj za mjerenje snage upadnog zračenja. Pomični zaslon ravnog ruba može djelomično ili u cijelosti zakloniti zračenje koje upada u detektor. Mikrometarski vijak za podizanje zaslona omogućuje pomake s korakom od $\Delta h = 10$ μm. Između



Slika 3.1: Graf funkcije e^{-x^2} (Gaussovo zvono) i funkcije erf x (error funkcija (3.6)).



Slika 3.2: Shematski prikaz mjernog uređaja u postavi s jednom lećom u prostoru između lasera i detektora.

lasera i klizača sa zaslonom i detektorom može se ubaciti dodatne klizače s nosačima za leće ili druge optičke elemente. Uređaj je shematski prikazan na Sl. 3.2.

Sastavimo li uređaj bez ijednog optičkog elementa u prostoru između lasera i detektora, on omogućuje ispitivanje raspodjele intenziteta laserskog snopa. Praćenjem snage $P(h)$ zračenja koje upada u detektor za razne visine zaslona h, uz pretpostavku da je raspodjela intenziteta zračenja osno simetrična, možemo provjeriti slijedi li ona oblik Gaussovog zvona (3.1), te možemo odrediti polumjer snopa w. Postavimo li, na primjer, jednu konvergentnu leću u prostor između lasera i detektora, mjerenjem polumjera Gaussovog snopa na raznim udaljenostima ℓ od leće možemo provjeriti valjanost izraza (3.2).

3.3 Zadatak

3.3.1 Polumjer laserskog snopa

Potrebno je sastaviti mjerni uređaj bez ijednog optičkog elementa između lasera i detektora te na odabranoj udaljenosti od samog lasera izmjeriri polumjer laserskog snopa. Mjerenje je potrebno obaviti na dva načina.

1. *Postupno zaklanjanje profila snopa*: Počevši od položaja zaslona pri kojem detektor zahvaća ukupnu snagu snopa, zaslon pomicati u koracima $\Delta h = 50\,\mu$m i bilježiti snagu, sve do položaja u kojem snaga više nije mjerljiva. Pod pretpostavkom da je laserski snop Gaussov, očekivana ovisnost $P(h)$ dana je izrazom (3.5). Rezultate treba obraditi metodom najmanjih kvadrata (vidi odjeljak 3.4.1), provjeriti ispunjenost gornje pretpostavke i odrediti polumjer snopa.

2. *Primjena "formule 03/07"*: Pronaći i zabilježiti položaje zaslona pri kojima detektor zahvaća 30 % i 70 % ukupne snage snopa i procijeniti maksimalne apsolutne pogreške tih položaja. Primjenom "formule 03/07" (3.7) odrediti polumjer laserskog snopa te njenu maksimalnu apsolutnu pogrešku.

3.3.2 (Polumjer struka Gaussovog snopa)

Ovaj dio vježbe se za sada *ne* izvodi: Postavlja se konvergentna leća pred otvor lasera (na mjesto na kojem je u prvom dijelu vježbe izmjeren polumjer snopa). Primjenom "formule 03/07" mjeri se polumjer snopa na nizu različitih udaljenosti od leće s korakom $\Delta\ell = 5$ cm, i računski se pronalazi položaj struka. Zatim se zaslon postavlja u točku struka, mjeri se polumjer struka postupnim zaklanjanjem profila, i dobiveni rezultat se uspoređuje s onim kojeg predviđa izraz (3.2).

3.4 Obrada mjerenja

3.4.1 Postupno zaklanjanje profila snopa

Mjerenja koja prikupljamo postupno zakljanjajući profil snopa pomičnim zaslonom možemo prikazati kao niz od $i = 1, \ldots, N$ vrijednosti snage P_i koje odgovaraju položaju zaslona h_i. Očekivana ovisnost snage o položaju dana je izrazom (3.5) koji ćemo ovdje napisati kao

$$P(h;\, P_0, w, h_0) = \frac{P_0}{2}\Big(1 - \mathrm{erf}\big(\sqrt{2}\,(h - h_0)/w\big)\Big). \tag{3.8}$$

Snagu nezaklonjenog snopa P_0, polumjer snopa w i položaj osi snopa h_0 shvaćamo kao parametre matematičkog modela. U skladu s metodom najmanjih kvadrata definiramo veličinu koja opisuje zbroj kvadrata odstupanja izmjerenih vrijednosti od onih koje predviđa matematički model kao

$$S^2(P_0, w, h_0) = \sum_i \frac{1}{\delta_i^2}\big(P_i - P(h_i;\, P_0, w, h_0)\big)^2, \tag{3.9}$$

gdje su δ_i maksimalne apsolutne pogreške mjerenja P_i.[1] Metoda najmanjih kvadrata zahtjeva pronalaženje minimuma fnkcije $S^2(P_0, w, h_0)$. Model je linearan u parametru P_0 pa je njegovu vrijednost moguće pronaći analitičkim putem,

$$\hat{P}_0 = \frac{\sum_i P_i Q_i/\delta_i^2}{\sum_i Q_i^2/\delta_i^2}, \tag{3.10}$$

gdje je

$$Q_i = \frac{1}{2}\Big(1 - \operatorname{erf}\big(\sqrt{2}(h - h_0)/w\big)\Big). \tag{3.11}$$

Minimum funkcije S^2 u odnosu na preostala dva parametra, w i h_0, moguće je pronaći jedino iterativnim (numeričkim) putem. Račune je moguće provesti s pomoću *Mathematica* programa `fit_spotsize.nb` dostupnog na web stranici kolegija.

3.4.2 Primjena "formule 03/07"

Neka su $\hat{h}_{0.3}$ i $\hat{h}_{0.7}$ očekivane vrijednosti položaja zaslona pri kojima mjerimo 30 %, odnosno 70 % ukupne snage snopa, a $\Delta h_{0.3}$ i $\Delta h_{0.7}$ neka su maksimalne apsolutne pogreške tih veličina. Prema "formuli 03/07" (3.7), očekivana vrijednost polumjera snopa je

$$\hat{w} = 1.90694\,\big|\hat{h}_{0.3} - \hat{h}_{0.7}\big|, \tag{3.12}$$

a maksimalna apsolutna pogreška je

$$\Delta w = 1.90694\,(\Delta h_{0.3} + \Delta h_{0.7}). \tag{3.13}$$

[1] U izrazu (3.9), korištenjem maksimalnih apsolutnih pogrešaka umjesto standardnih pogrešaka (koje ovdje zbog prirode mjerenja nisu poznate), krše se strogi uvjeti primjene metode najmanjih kvadrata. Dakako, takav postupak je uobičajen. Kako bismo naglasili da je riječ o ne sasvim doslijednoj primjeni metode najmanjih kvadrata koristimo oznaku S^2 umjesto χ^2.

Vježba 4

Određivanje Verdetove konstante

Pri prolasku linearno polarizirane svjetlosti kroz sredstvo u kojem je prisutno magnetsko polje dolazi do zakretanja ravnine polarizacije (Faradayev efekt). Laserski snop propuštamo kroz uzorak stakla koji se nalazi u polju elektromagneta. S pomoću polarizacijskog filtra pratimo zakretanje ravnine polarizacije snopa te određujemo konstantu proporcionalnosti između kuta zakreta i produkta duljine uzorka i jakosti polja (Verdetovu konstantu).

4.1 Uvod: Faradayev efekt i Malusov zakon

Kada linearno polarizirani elektromagnetski val prolazi sredstvom u kojem je prisutno magnetsko polje usmjereno duž smjera širenja vala dolazi do zakretanja ravnine polarizacije. Ako je B jakost magnetskog polja, a ℓ je duljina puta koju val prevaljuje u sredstvu, kut zakreta ravnine polarizacije β opisan je izrazom

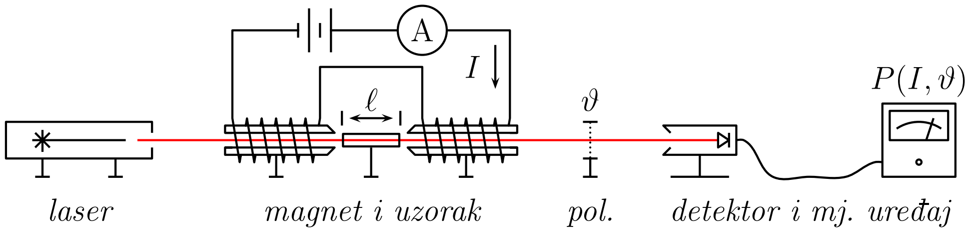
$$\beta = \nu B \ell, \tag{4.1}$$

gdje je ν tzv. Verdetova konstanta za dano sredstvo. Ova pojava poznata je kao Faradayev efekt.

Kada snop linearno polarizirane svjetlosti snage P_0 prođe kroz polarizator snagu snopa možemo opisati izrazom

$$P = P_0 \cos^2(\theta_\mathrm{P} - \theta_0), \tag{4.2}$$

gdje je θ_0 kut koji opisuje orijentaciju ravnine polarizacije upadnog vala, a θ_P je kut koji opisuje orijentaciju polarizatora. Gornja relacija poznata je kao



Slika 4.1: Shematski prikaz uređaja za mjerenje kuta zakreta ravnine polarizacije.

Malusov zakon. (Nakon prolaska kroz polarizator, kut θ_P također opisuje orijentaciju ravnine polarizacije propuštenog zračenja.)

4.2 Mjerni uređaj

Mjerni uređaj, prikazan na Sl. 4.1, sastoji se od

- poluvodičkog lasera crvene boje,
- elektromagneta duž čije osi prolazi laserski snop,
- sustava napajanja s mogućnošću podešaavanja jakosti struje,
- postolja za uzorak s uzorkom,
- polarizatora i
- poluvodičkog detektora s uređajem za mjerenje snage laserskog snopa.

Jakost magnetskog polja elektromagneta B razmjerna je jakosti struje I koja njime prolazi pa pišemo $B = bI$, gdje je konstanta b za područje u kojem se nalazi uzorak određena baždarenjem elektromagneta i iznosi

$$b = (0.0185 \pm 0.0005)\,\mathrm{T\,A^{-1}} \tag{4.3}$$

(dana je maksimalna apsolutna pogreška.)

Uzorak stakla koji proučavamo ima duljinu $\ell = 2\,\mathrm{cm}$ za koju pretpostavljamo da je poznata s potpunom točnošću.

Na osnovu izraza (4.1) i (4.2) očekujemo da će mjerena snaga snopa propuštenog kroz polarizator biti opisana izrazom

$$\begin{aligned} P &= P_\perp + P_\parallel \cos^2\big(\theta_\mathrm{P} - (\theta_0 + \beta)\big) \\ &= P_\perp + P_\parallel \cos^2\big(\theta_\mathrm{P} - (\theta_0 + \nu B \ell)\big), \end{aligned} \tag{4.4}$$

odnosno

$$P(I) = P_\perp + P_\parallel \cos^2\big(\theta_\mathrm{P} - \theta_0 - \nu b I \ell\big), \tag{4.5}$$

gdje je $P_\perp$ snaga koju mjerimo kada polarizator zaustavlja svo zračenje snopa (zbog vanjske svjetlosti te tamne struje detektora), a $P_\parallel$ je maksimalna snaga snopa koju polarizator može propustiti (ona je zbog djelomične refleksije na polarizatoru neznatno manja od snage upadnog snopa.)

Pri maksimalnoj struji koju elektromagnet dopušta kut zakreta ravnine polarizacije β bit će reda veličine 10° pa je uređaj uputno koristiti u području u kojem je on najosjetljiviji, dakle ondje gdje je $|\mathrm{d}P/\mathrm{d}I|$ maksimalno za $I = 0$. Lako je pokazati da je taj uvjet ispunjen pri

$$\theta_\mathrm{P} - \theta_0 = 45^\circ, \quad \text{odnosno} \quad P(0) = P_\perp + P_\parallel/2. \tag{4.6}$$

Razvijemo li ovisnost (4.5) u red po potencijama struje I uz uvjet (4.6) dobit ćemo

$$P(I) = P_\perp + \frac{P_\parallel}{2} + P_\parallel\, \nu b \ell\, I + \mathcal{O}^3(I). \tag{4.7}$$

Za male kutove zakreta ravnine polarizacije dopušteno je zanemariti članove višeg reda od linearnog ovdje naznačene kao $\mathcal{O}^3(I)$.

4.3 Zadatak

Cilj je odrediti Verdetovu konstantu uzorka optičkog stakla. Potrebno je napraviti sljedeća mjerenja:

- Uz isključenu struju izmjeriti snagu snopa za niz vrijednosti kuta polarizatora θ_P u intervalu od 0° do 180° uz korak od 10°. Ova mjerenja omogućit će određivanje parametara $P_\perp$ i $P_\parallel$ te postavljanje polarizatora u položaj u kojem je uređaj najosjetljiviji (uvjet (4.6)).

- Uz položaj polarizatora koji osigurava najveću osjetljivost uređaja treba izmjeriti snagu propuštenog snopa za struju jakosti $I = 0, \pm 2\,\mathrm{A}, \ldots, \pm 10\,\mathrm{A}$.

Verdetova konstanta određuje se na osnovu izraza (4.7).

4.4 Obrada mjerenja

Parametre $P_\perp$ i $P_\parallel$ je najjednostavnije procijeniti iz grafičkig prikaza mjerenja snage u ovisnosti o orijentaciji polarizatora. Točnije određivanje tih parametara moguće je provesti prilagodbenim postupkom (metodom najmanjih kvadrata) nelinearnog matematičkom modela (4.5). Račun se može provesti s pomoću *Mathematica* programa `fit_malus.nb` dostupnog na web stranici kolegija.

Skup od 11 mjerenja snage P_j koja odgovaraju jakostima struje $I_j = j \times (2\,\mathrm{A})$, $j = -5, \ldots, 5$ služi za određivanje Verdetove konstante uzorka. Za sve parove, osim za $j = 0$, Verdetovu konstantu se može odrediti izravno iz (4.7). Očekivana vrijednost Verdetove konstante određene iz j-tog para mjerenja je

$$\hat{\nu}_j = \frac{P_j - (P_\perp + P_\parallel/2)}{P_\parallel b \ell I_j}, \tag{4.8}$$

dok dominantan doprinos maskimalnoj apsolutnoj pogrešci dolazi od maksimalne apsolutne pogreške konstante b i struje I_j pa na osnovu (B.8) imamo

$$\Delta\nu_j = \hat{\nu}_j \left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta I_j}{I_j} \right). \tag{4.9}$$

Dakako, obzirom da je matematički model (4.7) koji koristimo linearan zanimljivije je obraditi svih 11 parova mjerenja zajedno prilagodbenim postupkom na model

$$y = a + \nu x \tag{4.10}$$

gdje je $y = P$, $a = P_\perp + P_\parallel/2$, a $x = P_\parallel b \ell I$. Račun se može provesti s pomoću alata SDMT (vidi odjeljak B.4.3).

Dodatak A

Sigurnost u laboratoriju

U laboratoriju se koriste plinski i poluvodički laseri koji zrače u vidljivom području spektra snagom snopa do 5 mW. Takvi laseri nisu opasni kada djeluju na kožu, međutim i najkraće izlaganje ljudskog oka izravnom djelovanju laserskog snopa može dovesti do oštećenja tkiva retine i do trajnog oštećenja vida. Valja se pridržavati sljedećih pravila:

Ne gledaj u laserski snop. Ne gledaj izravno u snop niti u snop odbijen od optičkih elemenata kao što su ogledala i prizme. Ne gledaj niti u difuzno raspršenu lasersku svjetlost. Ukratko, ne gledaj u sjajnu svjetlost lasera.

Prostorija neka bude rasvijetljena. Čim je rasvjeta u prostoriji jača pupila oka je zbog prilagodbe razini svjetlosti zatvorenija, pa se time smanjuje vjerojatnost ulaska laserskog snopa u oko.

Pronađite i zaustavite sve snopove koje ne koristite. Snopovi ne smiju napustiti područje eksperimentalnog uređaja i širiti se prostorijom. Takve snopove zovemo 'odbjeglim snopovima'.

Sve optičke komponente moraju biti dobro pričvršćene. Nekontrolirano pomicanje optičkih elemenata može dovesti do 'odbejglih snopova' koji se šire prostorijom.

Snopovi se smju širiti isključivo vodoravno. Poštujući ovo pravilo pri sastavljanju eksperimentalnog uređaja olakšava se kasnije rukovanje opremom, olakšava se kretanje, te se umanjuje vjerojatnost slučajnog ulaska snopa u oko. Uputno je da ravnina snopova bude u visini struka.

Ne saginji se ispod ravnine snopova. Padne li vam štogod, ugasite lasere prije saginjanja ili na bilo koji drugi način izbjegnite otvorenih očiju proći korz ravninu snopova. Ne sjedite pored opreme ako stolica nije dovoljno visoka da vam glava bude znatno iznad ravnine snopova.

Vodi računa o odbijanju i o apsorpciji svjetlosti. Optička komponenta čija je osnovna uloga propustiti svjetlost reflektirat će jedan njen dio što može dovesti do 'odbjeglog snopa', a dio će apsorbirati što može dovesti do njena zagrijavanja.

Dođe li do izlaganja oka djelovanju laserskog snopa položaj oštećenja u oku ovisi o valnoj duljini laserske svjetlosti (zbog ovisnosti indeksa loma leće oka o valnoj duljini). Zrake ultraljubičastog i infracrvenog dijela spektra apsorbiraju se u rožnici, odnosno leći oka i mogu uzrokovati njeno zamućenje. Zrake vidljivog dijela spektra, kao npr. svjetlost He-Ne lasera, prolaze kroz prozirne dijelove oka i fokusiraju se na mrežnici. Gustoća laserskih zraka u fokusu ovisi o refrakciji oka i o prozirnosti rožnice, leće i staklovine. Ako je prozirnost potpuna, a refrakcija normalna, kolimacija zraka u mrežnici bit će velika, a time i učinak zračenja. Energija zračenja se najvećim dijelom pretvara u toplinu koja ometa djelovanje enzima, dovodi do ionizacije tkiva i propadanja stanica mrežnice. Tako će izlaganje oka snopu He-Ne lasera snage 1 mW u trajanju od svega nekoliko stotinki sekunde dovesti do porasta temperature od 10°C što je dovoljno da dođe do oštećenja metabolizma stanica. Stupanj oštećenja vida ovisi o mjestu oštećenja na mrežnici, a ono je najveće dođe li do oštećenja središnjeg dijela (makule) gdje je gustoća osjetilnih stanica najveća. Ako je površina oštećenja malena, periferna oštećenja mogu ostati i neopažena jer ne smanjuju vidno polje.

Dodatak B

Obrada mjerenja

Dan je sažet pregled izraza koji se koriste pri obradi mjerenja u vježbama opisanim u ovim uputama. Više pojedinosti, kao i teoriju na kojoj se izrazi temelje, može se naći npr. u Ref. [3] ili [4].

B.1 Prikazivanje pogreške

Obzirom da niti jednu fizikalnu veličinu nije moguće izmjeriti s potpunom točnošću vrijednost izmjerene fizikalne veličine y obično prikazujemo kao

$$y = \hat{y} \pm \delta y, \tag{B.1}$$

gdje je

$$\hat{y} = \text{očekivana vrijednost } y, \tag{B.2}$$

$$\delta y = \text{procjena pogreške } \hat{y}. \tag{B.3}$$

Očekivana vrijednost $\hat{y}$ predstavlja najbolju procjenu prave (nepoznate) vrijednosti fizikalne veličine. Procijenjena pogreška δy očekivane vrijednosti $\hat{y}$ po svojoj prirodi najčešće je jedna od sljedećih:

Standardna pogreška, σ_y, pod ograničenjima danim statističkom teorijom podrazumijeva 68%-tnu vjerojatnost da se prava vrijednost fizikalne veličine nalazi unutar navedenog intervala.

Maksimalna apsolutna pogreška, Δy, odražava našu "potpunu sigurnost" da se prava vrijednost nalazi unutar navedenog intervala.

Uz prikaz vrijednosti fizikalne veličine kao u (B.1) važno je naznačiti radi li se o standardnoj ili o maksimalnoj apsolutnoj pogrešci.

B.2 Propagacija pogreške

Pretpostavimo da želimo odrediti vrijednost fizikalne veličine

$$f(x,\ldots,z) \tag{B.4}$$

gdje su veličine $x,\ldots,z$ o kojima f ovisi poznate s ograničenom točnošću. Potrebno je izračunati očekivanu vrijednosti $\hat{f}$ i procijenjenu pogrešku δf te konačni rezultat prikazati u skladu s (B.1) kao

$$f = \hat{f} \pm \delta f. \tag{B.5}$$

Očekivana vrijednost $\hat{f}$ računa se koristeći očekivane vrijednosti veličina $x,\ldots,z$,

$$\hat{f} = f(\hat{x},\ldots,\hat{z}). \tag{B.6}$$

Ako su kao procijenjene pogreške veličina $x,\ldots,z$ dane njihove standardne pogreške, $\sigma_x,\ldots,\sigma_z$, računamo standardnu pogrešku funkcije f s pomoću izraza

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2}, \tag{B.7}$$

a kada su poznate maksimalne apsolutne pogreške, $\Delta x,\ldots,\Delta z$, računamo maksimalnu apsolutnu pogrešku funkcije f s pomoću izraza

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z. \tag{B.8}$$

U situaciji gdje su za neke od veličina $x,\ldots,y$ poznate standardne, dok su za preostale veličine poznate apsolutne pogreške, uobičajeno je u izrazu (B.8) koristiti standardne pogreške na mjestu apsolutnih.

B.3 Metoda najmanjih kvadrata

Kako bismo istražili ovisnost fizikalne veličine y o veličinama $x,\ldots,z$,

$$y = y(x,\ldots,z), \tag{B.9}$$

mjerimo veličinu y pri različitim vrijednostima veličina $x,\ldots,z$. Mjerenja možemo prikazati kao

$$y_i = y(x_i,\ldots,z_i) = \hat{y}_i \pm \sigma_i, \qquad i = 1,\ldots,N, \tag{B.10}$$

gdje su $x_i,\ldots,z_i$ vrijednosti veličina $x,\ldots,z$ pri kojima je i-to mjerenje obavljeno, $\hat{y}_i$ je očekivana vrijednost, a zbog jednsotavnosti pretpostavljamo da je poznata standardna pogreška i-tog mjerenja σ_i. Također zbog jednostavnosti pretpostavljamo da su vrijednosti $x_i, \ldots, z_i$ pri kojima je i-to mjerenje obavljeno poznate s potpunom točnošću. Obrada ovakvih mjerenja se obično provodi *metodom najmanjih kvadrata* koju možemo u najgrubljim crtama ovako sažeti:

1. Odabiremo *matematički model* za koji očekujemo da može dobro opisati fizikalnu ovisnost y o $x, \ldots, z$. Općenito, matematički model je funkcija

$$f = f(x, \ldots, z;\ a, \ldots, b) \tag{B.11}$$

   koja osim o veličinama $x, \ldots, z$ ovisi i o skupu tzv. *slobodnih parametara* $a, \ldots, b$. Vrijednosti slobodnih parametara su za sada nepoznate, a bit će određene metodom koju opisujemo. Uobičajeno je koristiti matematički model sastavljen na osnovu fizikalnih argumenata tako da parametri imaju fizikalno značenje.

2. Definiramo veličinu χ^2 koja za dane vrijednosti parametara $a, \ldots, b$, (na osnovu zbroja kvadrata odstupanja pojedninih mjerenja od vrijednosti koje predviđa matematički model) opisuje ukupno odstupanje mjerenja od modela,

$$\chi^2 = \chi^2(a, \ldots, b) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\hat{y}_i - f(x_i, \ldots, z_i;\ a, \ldots, b)}{\sigma_i} \right)^2, \tag{B.12}$$

   gdje je $\hat{y}_i$ očekivana vrijednost, a σ_i je standardna pogreška i-tog mjerenja.

3. Provodimo tzv. *prilagodbeni postupak* (engl. *fit*), što znači da pronalazimo one vrijednosti parametara $a, \ldots, b$ za koje je ukupno odstupanje modela od izmjerenih vrijednosti najmanje, tj. tražimo minimum funkcije χ^2 u odnosu na parametre. To postižemo rješavanjem sustava jednadžbi

$$\frac{\partial}{\partial a}\chi^2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial b}\chi^2 = 0 \tag{B.13}$$

   po parametrima $a, \ldots, b$. U minimumu funkcije χ^2 zbroj kvadrata odstupanja pojedinih mjerenja od vrijednosti predviđenih modelom jest najmanji mogući (otuda ime "metoda najmanjih kvadrata"), pa smatramo da su parametri modela najbolje prilagođeni mjerenjima (otuda ime "prilagodbeni postupak"). Vrijednosti parametara pri kojima je $\chi^2 = \chi^2_{\min}$ uzimamo kao očekivanu vrijednost parametara.

Rješenje sustava (B.13) jednoznačno je jedino kada je model f linearan u slobodnim parametrima. U protivnom koristimo iterativne (numeričke) postupke.

Ovdje nije opisano na koji način određujemo opisuje li odabrani model mjerenja zadovoljavajuće dobro, treba li model odbaciti i potražiti bolji, ili je pak model pretjerano prilagodljiv pa se na njega ne možemo osloniti. Također nije opisano na koji način procijenjujemo pogreške parametara određenih metodom najmanjih kvadrata. Više pojedinosti o metodi najmanjih kvadrata i njenim primjenama može se naći npr. u Ref. [3] ili [4].

B.4 Jednostavni matematički modeli

Primjena metode najmanjih kvadrata naročito je jednostavna uz sljedeće pretpostavke:

- Odabrani matematički model je linearan u parametrima.
- Odabrani matematički model dobro opisuje mjerenu pojavu.
- Procijenjene pogreške pojedinih mjerenja međusobno su jednake.

Drugom pretpostavkom najavljujemo da metodu najmanjih kvadrata nećemo koristiti kako bismo prihvatili, odnosno odbacili, matematički model, već isključivo za određivanje vrijednosti slobodnih parametara matematičkog modela. Treća pretpostavka pojednostavljuje račune ponajprije zbog toga što se pokazuje da je metodu moguće koristiti čak i kada procijenjene pogreške pojedinih mjerenja nisu poznate.

B.4.1 Konstanta: $y = a$

Fizikalnu veličinu za koju smatramo da je stalna tokom mjerenja opisujemo konstantom a koja je jedini slobodni parametar modela

$$y(a) = a. \tag{B.14}$$

U slučajevima kada smo fizikalnu veličinu y u mogućnosti izmjeriti samo jednom, ili ako pri ponavljanju mjerenja dobivamo uvijek istu vrijednost y_0 (nedovoljno precizan mjerni uređaj), procjenjujemo maksimalnu apsolutnu pogrešku Δy rukovodeći se načelom da se prava vrijednost "sigurno" nalazi unutar intervala kojeg iskazujemo procijenjenom pogreškom. Rezultat iskazujemo kao

$$y = y_0 \pm \Delta y. \tag{B.15}$$

(Uobičajeno je kao maksimalnu apsolutnu pogrešku Δa uzeti polovinu jedinice kojom je baždarena skala mjernog uređaja.)

Izmjerimo li fizikalnu veličinu y veći broj puta dovoljno preciznim mjernim uređajem dobivene vrijednosti $y_1, \ldots, y_N$ međusobno će se razlikovati. Metodom najmanjih kvadrata kao očekivanu vrijednost parametra a dobivamo aritmetičku sredinu mjerenja,

$$\hat{a} = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i, \tag{B.16}$$

dok kao standardnu pogrešku parametra a dobivamo izraz poznat kao *standardna devijacija aritmetičke sredine*,

$$\sigma_a = \Big(\frac{1}{N\,(N-1)} \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \Big)^{1/2}. \tag{B.17}$$

Konačno pišemo

$$a = \hat{a} \pm \sigma_a. \tag{B.18}$$

B.4.2 Pravac: $y = a + b\,x$

Često korišten matematički model jest pravac

$$y(x;\; a, b) = a + b\,x, \tag{B.19}$$

gdje su a i b slobodni parametri. Neka su y_i, $i = 1, \ldots, N$ mjerenja veličine y prikupljena pri različitim vrijednostima veličine x. Očekivane vrijednosti parametara a i b dobivene metodom najmanjih kvadrata (uz ranije navedene pretpostavke) su

$$\hat{a} = \frac{1}{\Delta} \Big(\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i\, y_i \Big), \tag{B.20}$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\Delta} \Big(N \sum_i x_i\, y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i \Big), \tag{B.21}$$

gdje je

$$\Delta = N \sum_i x_i^2 - \Big(\sum_i x_i \Big)^2. \tag{B.22}$$

Standardne pogreške parametara a i b su

$$\sigma_a = \sigma_y \Big(\frac{1}{\Delta} \sum_i x_i^2 \Big)^{1/2}, \tag{B.23}$$

$$\sigma_b = \sigma_y\,(N/\Delta)^{1/2}, \tag{B.24}$$

gdje je

$$\sigma_y = \Big(\frac{1}{N-2} \sum_i (y_i - \hat{a} - \hat{b}\, x_i)^2 \Big)^{1/2} \tag{B.25}$$

standardno odstupanje izmjerenih vrijednosti od vrijednosti predviđenih modelom. Izraze (B.23) i (B.24) može se napisati i u obliku s kojim je jednostavnije računati,

$$\sigma_b^2 = \frac{N}{\Delta\,(N-2)} \Big(\sum_i y_i^2 - \hat{a} \sum_i y_i - \hat{b} \sum_i x_i\, y_i \Big), \tag{B.26}$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_b^2 \sum_i x_i^2 / N. \tag{B.27}$$

B.4.3 Web-aplikacija SDMT: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Web-aplikacija SDMT (Simple data modeling tool):

`http://sail.zpf.fer.hr/sdmt/`

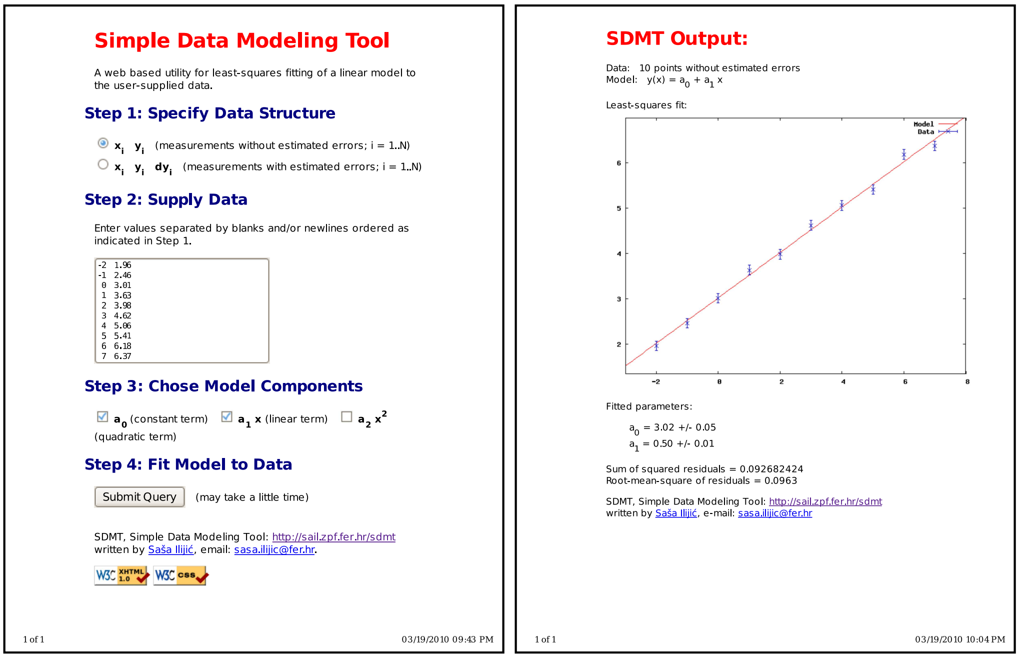
omogućuje provedbu prilagodbenog postupka (metoda najmanjih kvadrata) za matematički model

$$y(x; a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \tag{B.28}$$

Gornji model je linearan u parametrima a_0, a_1 i a_2 te predstavlja parabolu $y(x)$.

Početna web-stranica s poljima za unos podataka prikazana je na Sl. B.1. U prvom koraku, u skladu s pretpostavkom da su procijenjene pogreške pojedinih mjerenja međusobno jednake, odabiremo "data without estimated errors". U drugom koraku upisujemo mjerenja. Svaki par x_i, y_i unosi se na jednu liniju. Kao decimalni separator koristi se točka, a brojevi su odijeljeni razmakom. U trećem koraku odabiremo komponente modela koje ćemo koristiti. Barem jedna komponenta mora biti odabrana. Npr. odaberemo li samo $a_1 x$ matematički model je pravac kroz ishodište, dok ako kao u primjeru na Sl. B.1 odaberemo a_0 i $a_1 x$ model je općenit pravac kao u B.4.2 Konačno, u četvrtom koraku šaljemo podatke na obradu. Web-stranica s rezultatima obrade (Sl. B.1) grafički prikazuje mjerenja i model te ispisuje očekivane vrijednosti i procijenjene pogreške parametara dobivenih prilagodbenim postupkom. Na grafu su uspravnim crtama naznačeno standardno odstupanje mjerenja od modela.

SDMT se može koristiti i kada su poznate procijenjene pogreške pojedinih mjerenja. Tada u prvom koraku odabiremo "measurements with estimated



Slika B.1: Početna web-stranica alata SDMT s poljima za unos podataka (lijevo) i web-stranica s rezultatima obrade (desno).

errors", a u polju za upis mjerenja osim x_i i y_i unosimo i standardnu pogrešku σ_i. Graf na stranici s rezultatima tada će prikazati pogreške pojedinih mjerenja, a osim očekivanih vrijednosti parametara i njihovih procijenjenih pogrešaka izračunat će se veličinu poznatu kao "goodness of fit" ("dobrota prilagodbe") koja služi kako bismo mogli prihvatiti odnosno odbaciti model.

Bibliografija

[1] V. Henč–Bartolić, L. Bistričić: *Predavanja i auditorne vježbe iz fizike lasera*, Element, 2003.

[2] W. Demtröder: *Laser Spectroscopy*, Springer, 2003.

[3] J. R. Taylor: *An introduction to error analysis*, University Science Books, 1997.

[4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: *Numerical recipes in FORTRAN*, Cambdidge University Press, 1992.

[5] G. Arfken: *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 3rd ed., 1985.