Kvantno računalo

Kvantna računala (SI)

7. prosinca 2021.

Prikaz stanja sustava klasičnih bitova

Stanja klasičnog bita možemo prikazati vektor-stupcima

$$0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stanja sustava dvaju klasičnih bitova prikazujemo s

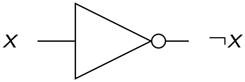
$$00 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad 11 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustav n klasičnih bitova ili n-bitno klasično računalo može se naći u 2^n različitih stanja koja prikazujemo s 2^n linearno neovisnih vektor-stupaca dimenzije 2^n.

Nereverzibilnost klasičnog logičkog kruga

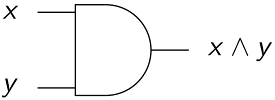
Klasična logička vrata prikazujemo simbolima i matricama:

NOT:



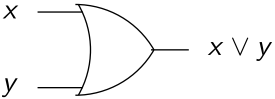
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

AND:



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OR:

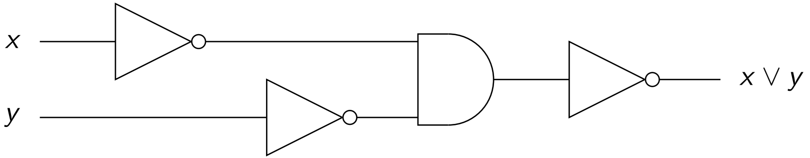


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Složenija klasična vrata (klasični logički krug, klasično računalo) prikazujemo kao sekvencijalne sklopove jednostavnih logičkih vrata. Za tvorbu proizvoljno složenih vrata dovoljna su NOT i AND vrata (ili samo NAND vrata).

Primjer: Tvorba OR s pomoću NOT i AND

DeMorganov identitet: $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$



Matrični prikaz: $\mathrm{OR} = \mathrm{NOT} \cdot \mathrm{AND} \cdot (I \otimes \mathrm{NOT}) \cdot (\mathrm{NOT} \otimes I)$

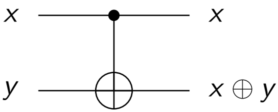
Općenito, na osnovi poznatog stanja na izlazu iz klasičnih vrata nije moguće rekonstruirati stanje na ulazu te kažemo da *klasična logička vrata općenito nisu reverzibilna*. Primjer reverzibilnih vrata su NOT vrata, dok nijedna vrata s većim brojem ulaznih od broja izlaznih bitova (AND, OR) nisu reverzibilna. Slijedi da u klasičnom logičkom krugu dolazi do

- gubitka informacije,
- povećanja entropije,
- utoška energije,
- te do oslobađanja topline (vidi Landauerov princip).

Također slijedi da se općeniti klasični logički krug *ne* ponaša u skladu s principom kvantne mehanike prema kojem je evolucija stanja sustava unitarna odn. reverzibilna.

cNOT, Toffolijeva i Fredkinova reverzibilna vrata

Upravljana NOT, control-NOT ili cNOT vrata (operator):



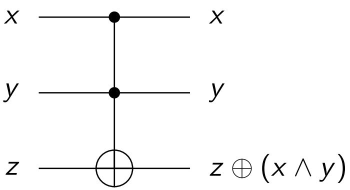
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

Bit x ima ulogu upravljačkog ili kontrolnog bita.

Operator $\oplus$ je binarni XOR operator odn. zbrajanje modulo 2.

Reverzibilnost: $\text{cNOT} \cdot \text{cNOT} = I$

Toffolijeva vrata (operator):



$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&& 1 & \end{pmatrix}$$

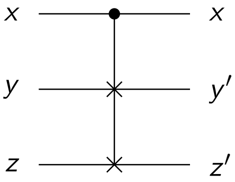
Bitovi x i y su kontrolni bitovi.

Reverzibilnost: $\text{Toffoli} \cdot \text{Toffoli} = I$

Univerzalnost: možemo konstruirati NOT i AND vrata

$$(1,1,z) \to (1,1,\neg z) \qquad (x,y,0) \to (x,y,x \wedge y)$$

Fredkinova vrata (operator):



$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&&&& 1 & \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

Bit x je kontrolni bit:

$$(0, y, z) \to (0, y, z) \qquad (1, y, z) \to (1, z, y)$$

Reverzibilnost: $\text{Fredkin} \cdot \text{Fredkin} = I$

Univerzalnost: možemo konstruirati NOT i AND vrata

$$(x, 1, 0) \to (x, \neg x, x) \qquad (x, 0, z) \to (x, x \wedge z, (\neg x) \wedge z)$$

Postojanje univerzalnih reverzibilnih vrata (Toffolijeva ili Fredkinova vrata) implicira da je svaki klasični algoritam moguće izvesti korištenjem reverzibilnog logičkog kruga.

Reverzibilnost kvantnog logičkog kruga

Klasično računalo je sustav klasičnih bitova. n-bitno klasično računalo se može naći u 2^n različitih stanja.

Kvantno računalo je sustav kvantnih bitova (qubitova). Stanje n-qubitnog kvantnog računala je bilo koja linearna superpozicija 2^n stanja koja odgovaraju vektorima baze Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{\otimes n}$ dimenzije 2^n. Stanja koja odgovaraju vektorima baze možemo obilježiti s $|0\rangle, \ldots, |2^n - 1\rangle$.

Primjer: Vektori tzv. računalne baze 3-qubitnog računala su

$$|0\rangle = |000\rangle\,, \quad |1\rangle = |001\rangle\,, \quad |2\rangle = |010\rangle\,, \quad \ldots \quad |7\rangle = |111\rangle\,,$$

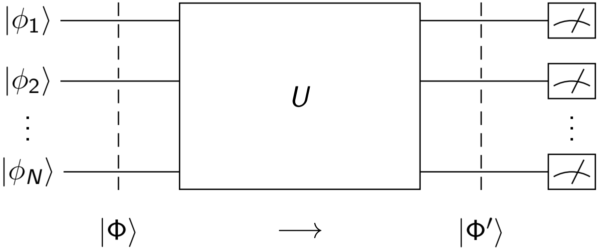
gdje je npr. $|5\rangle = |101\rangle = |1 \otimes 0 \otimes 1\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$

Važno je uočiti sljedeću razliku između n-bitnog klasičnog i n-qubitnog kvantnog računala:

- Klasično računalo se može naći u 2^n različitih stanja. Pri mjerenju (očitanju) stanja ono ostaje nepromijenjeno.
- Kvantno računalo se može nalaziti u beskonačnom mnoštvu različitih stanja (linearne superpozicije 2^n stanja računalne baze). Mjerenjem (očitanjem) stanja kvantnog računala dobivamo neko od 2^n stanja računalne baze, nakon čega smatramo da računalo prelazi upravo u to stanje. To znači da je mjerenje (očitanje) stanja moguće obaviti samo jednom.

Evoluciju stanja kvantnog računala opisujemo unitarnom transformacijom

$$|\Phi\rangle \to |\Phi'\rangle = U\,|\Phi\rangle$$



Unitarnost transformacije podrazumijeva postojanje inverzne transformacije, $U^{-1} = U^{\dagger}$, odnosno *reverzibilnost računalnog postupka* koji računalo provodi.

S obzirom da je svaki klasični algoritam moguće formulirati s pomoću klasičnih reverzibilnih logičkih vrata, slijedi da je svaki klasični algoritam, barem u načelu, moguće izvesti i na kvantnom računalu.

Osim klasičnih algoritama, kvantna računala mogu izvoditi i tzv. kvantne algoritme koji se suštinski razlikuju od klasičnih algoritama.

Kvantna vrata (operatori) koji djeluju na jedan qubit

Vratima u kvantnom logičkom krugu smatramo bilo koji unitarni operator koji djeluje na jedan ili više qubitova.

Vrata odn. unitarni operator U koji djeluje na jedan qubit prikazujemo simbolom

$$—\boxed{U}—$$

Vrata su definirana relacijama

$$U|0\rangle = \alpha_{00}|0\rangle + \alpha_{10}|1\rangle$$
$$U|1\rangle = \alpha_{01}|0\rangle + \alpha_{11}|1\rangle$$

pri čemu je matrica $U = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix}$ unitarna $(U^\dagger \cdot U = I)$.

Primjer: Paulijeve matrice su unitarne te ih možemo koristiti kao kvantna vrata

$$X = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad -\boxed{X}-$$

$$Y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad -\boxed{Y}-$$

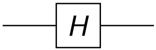
$$Z = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad -\boxed{Z}-$$

U prikazu stanja qubita na Blochovoj sferi, djelovanje operatora X na općenito stanje qubita odgovara rotaciji stanja za kut π oko osi x te vrijedi $X^2 = I$. Analogno vrijedi za Y i Z.

Prepoznajemo $X = \text{NOT}$.

Primjer: Hadamardova vrata (operator)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$



H pretvara stanja baze $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ u stanja komplementarne baze $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, gdje su $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle \pm |1\rangle\big)$,

$$H|0\rangle = |+\rangle, \qquad H|1\rangle = |-\rangle.$$

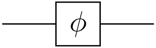
H je vlastiti inverz: $H^\dagger \cdot H = H^2 = I$.

H možemo izraziti s pomoću Paulijevih matrica: $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z)$

U prikazu na Blochovoj H provodi rotaciju stanja za kut π oko osi $\hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$.

Primjer: Operator faznog pomaka

$$R[\phi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$



U prikazu stanja na Blocohovoj sferi, operator $R[\phi]$ provodi rotaciju stanja oko z-osi za kut ϕ. Posebni slučajevi su Paulijev operator $Z = R[\pi]$ te operatori

$$S = R[\pi/2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad T = R[\pi/4] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

Korištenjem Hadamardovog operatora može se realizirati rotacije oko osi x i y operatorima

$$R_x[\phi] = H \cdot R[\phi] \cdot H \qquad \text{i} \qquad R_y[\phi] = T \cdot H \cdot R[\phi] \cdot H \cdot T^{-1}.$$

Primjer: Vrata "korijen iz NOT" (square-root-of-NOT)

$$\sqrt{\mathrm{NOT}} = \sqrt{X} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

Matrica je unitarna,

$$\left(\sqrt{X}\right)^{\dagger} \cdot \sqrt{X} = I,$$

a vrata su dobila ime zbog svojstva

$$\sqrt{X} \cdot \sqrt{X} = X.$$

Vrijedi identitet

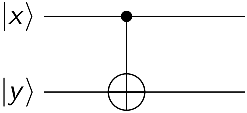
$$\sqrt{X} = H \cdot S \cdot H.$$

Kvantna vrata cNOT i cU

Općenita kvantna logička vrata u $\mathcal{H}^{\otimes n}$ opisujemo unitarnom matricom dimenzije $2^n \times 2^n$.

Teorem (ovdje bez dokaza): Općenitu unitarnu transformaciju u $\mathcal{H}^{\otimes n}$ moguće je prikazati kao produkt cNOT vratiju i unitarnih transformacija nad pojedinačnim qubitovima.

Vrata cNOT preuzimamo iz klasične logike:



$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

Ako se stanja $|x\rangle$ i $|y\rangle$ qubitova na ulazu u vrata cNOT podudaraju s vektorima računalne baze $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, djelovanje kvantnih logičkih vratiju cNOT možemo izraziti kao

$$|x\rangle \otimes |y\rangle \to |x\rangle \otimes |x \oplus y\rangle .$$

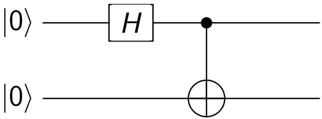
Koristeći stanja računalne baze 2-qubitnog računala imamo

$$|00\rangle \to |00\rangle , \quad |01\rangle \to |01\rangle , \quad |10\rangle \to |11\rangle , \quad |11\rangle \to |10\rangle .$$

Primjer: Neka se sustav dvaju qubitova početno nalazi u stanju

$$|\Phi\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle \, .$$

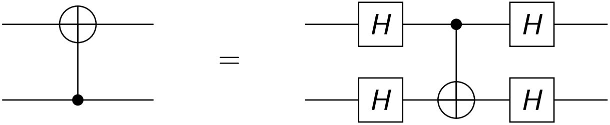
Na izlazu iz logičkog kruga



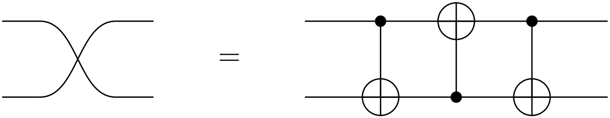
dobivamo spregnuto stanje

$$|\Phi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|00\rangle + |11\rangle\,\big).$$

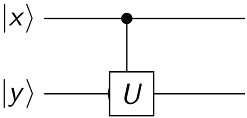
Primjer: Preokrenuta cNOT vrata



Primjer: Realizacija SWAP operatora cNOT vratima



Operator cU (control-U), gdje je U unitarni operator koji djeluje na stanje jednog qubita, možemo shvatiti kao poopćenje operatora cNOT:



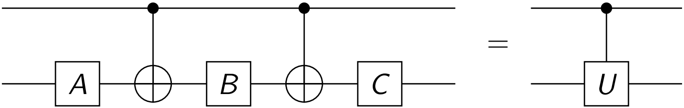
$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

Qubit $|x\rangle$ je kontrolni qubit, a $|y\rangle$ je ciljni qubit:

- Ako $|x\rangle = |0\rangle$ onda $|y\rangle$ ostaje nepromijenjen.
- Ako $|x\rangle = |1\rangle$ onda $|y\rangle \to U\,|y\rangle$.

Odabirom $U = X = \text{NOT}$ dobivamo operator cNOT.

Primjer: Operator cU možemo konstruirati s pomoću kruga



ako unitarni operatori A, B i C zadovoljavaju uvjete

$$CBA = I, \qquad CXBXA = U.$$

Blok-matrični prikaz:

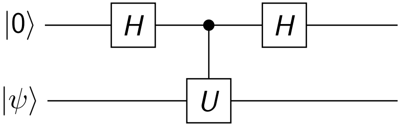
$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} CBA & 0 \\ 0 & CXBXA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

Primjer: Neka je $|\psi\rangle$ svojstveno stanje unitarnog operatora U sa svojstvenom vrijednošću λ,

$$U\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle\,, \qquad |\lambda| = 1.$$

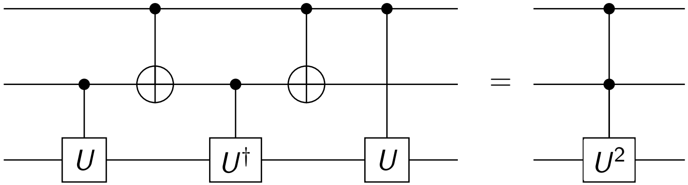
Na izlazu iz logičkog kruga



dobivamo stanje

$$\left(\frac{1+\lambda}{2}\,|0\rangle + \frac{1-\lambda}{2}\,|1\rangle\right) \otimes |\psi\rangle\,.$$

Primjer: Ako je U unitarni operator, vrijedi sljedeći identitet među kvantnim logičkim krugovima:



Toffolijeva vrata dobivamo uz odabir

$$U = \sqrt{X} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$