Stanja i operatori u $\mathcal{H}^{(2)}$

Kvantna računala (SI)

2. studenog 2021.

Prikaz stanja qubita na Blochovoj sferi

Blochova sfera

Potpuno općenito stanje qubita može se izraziti vektorom stanja

$$|\Phi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \cos\frac{\vartheta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \sin\frac{\vartheta}{2}\,|1\rangle$$

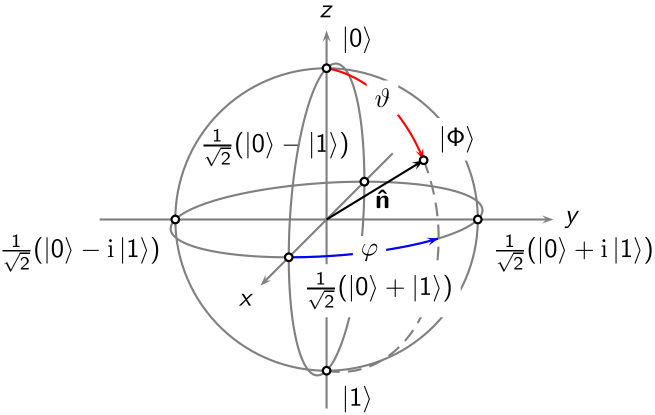
gdje su $|0\rangle$ i $|1\rangle$ vektori ortonormirane baze u $\mathcal{H}^{(2)}$, a parametre

$$0 \leq \varphi < 2\pi \qquad \text{i} \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

možemo shvatiti kao koordinate točke na tzv. *Blochovoj sferi*.

Gornji zapis osigurava normiranost vektora stanja $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ te uzima u obzir činjenicu da $|\Phi\rangle$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\,|\Phi\rangle$ predstavljaju isto stanje.

Prikaz stanja $|\Phi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \cos\frac{\vartheta}{2}\ |0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \sin\frac{\vartheta}{2}\ |1\rangle$ na BS:



3D-vektor: $\hat{\mathbf{n}} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\vartheta\,\hat{\mathbf{z}}$

3D-vektor $\hat{\mathbf{n}} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\vartheta\,\hat{\mathbf{z}}$ pokazuje točku na Blochovoj sferi kojoj odgovara vektor stanja

$$|\Phi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}\,|1\rangle\,.$$

3D-vektor $-\hat{\mathbf{n}}$ koji dobivamo zamjenom $\vartheta \to \pi - \vartheta$ i $\varphi \to \varphi \pm \pi$ pokazuje suprotnu točku na BS kojoj odgovara vektor stanja

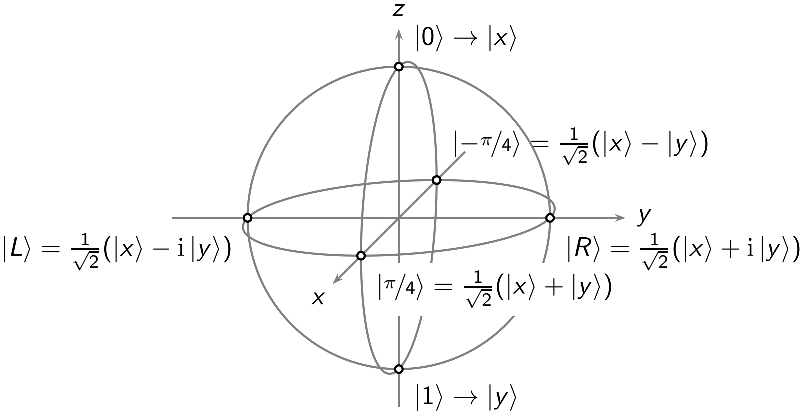
$$\begin{aligned} |\Phi_\perp\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi\pm\pi)/2}\cos\frac{\pi-\vartheta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi\pm\pi)/2}\sin\frac{\pi-\vartheta}{2}\,|1\rangle \\ &= \mp\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}\,|0\rangle - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,|1\rangle\right). \end{aligned}$$

Vektori stanja $|\Phi\rangle$ i $|\Phi_\perp\rangle$ zadovoljavaju relacije ortonormiranosti te predstavljaju moguć odabir ortonormirane baze u $\mathcal{H}^{(2)}$.

Stanja qubita prikazana na Blochovoj sferi:

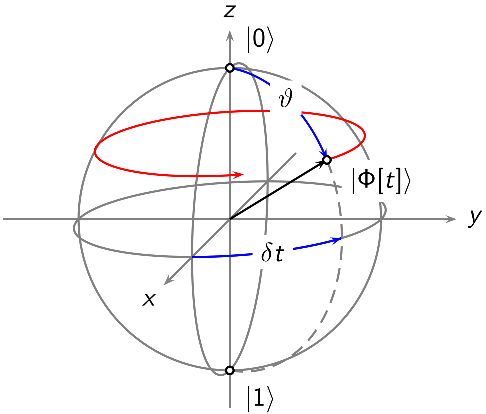
- Bilo koji par suprotnih točaka na Blochovoj sferi predstavlja moguć odabir vektora ortonormirane baze.
- Provjere stanja koja se nalaze na "ekvatoru" Blochove sfere koji je određen odabirom baze (polova) maksimalno su nekompatibilne sa provjerama stanja baze.
- Bilo koji par suprotnih točaka na ekvatoru predstavlja bazu koja je komplementarna s bazom koja određuje ekvator.
- Istovremeno je moguće odabrati tri međusobno komplementarne baze. (To mogu biti, na primjer, parovi točaka u kojima x, y i z-os probadaju Blochovu sferu.)

Primjer: Prikaz stanja polarizacije fotona na BS:



Primjer: Ako stanjima $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju energije $\hbar\omega_0$ i $\hbar\omega_1$,

$$|\Phi[t]\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta t/2} \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta t/2} \sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle\,, \qquad \delta = \omega_0 - \omega_1.$$



Paulijeve matrice i prikaz hermitskog operatora

Projektori na vektore stanja $|0\rangle = \binom{1}{0}$ i $|1\rangle = \binom{0}{1}$ koja se nalaze u točkama u kojima z-os probada Blochovu sferu su

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koristeći te projektore sastavljamo hermitski operator

$$\sigma_z = (+1)|0\rangle\langle 0| + (-1)|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svojstveni vektori tog operatora su $|0\rangle$ (točka Blochove sfere u kojoj ju probada pozitivan krak z-osi) sa svojstvenom vrijednošću 1 te $|1\rangle$ (točka BS u kojoj ju probada negativan krak z-osi) sa svojstvenom vrijednošću -1.

Sličnim postupkom sastavljamo hermitske operatore čija svojstvena stanja odgovaraju parovima točaka na Blochovoj sferi u kojima ju probadaju x odnosno y-os i čije su svojstvene vrijednosti ± 1. Matrični prikazi tih operatora su

$$\sigma_x = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \sigma_y = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Uobičajene su oznake

$$\sigma_1 = \sigma_x = X, \qquad \sigma_2 = \sigma_y = Y, \qquad \sigma_3 = \sigma_z = Z,$$

a može se pokazati da vrijede relacije

$$\sigma_i^2 = I, \qquad \sigma_1\sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3, \qquad \sigma_2\sigma_3 = \mathrm{i}\sigma_1, \qquad \sigma_3\sigma_1 = \mathrm{i}\sigma_2.$$

Paulijeve ili σ-matrice

Matrice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zovemo *Paulijevim* ili *σ-matricama*. One predstavljaju hermitske operatore u $\mathcal{H}^{(2)}$ čiji se svojstveni vektori podudaraju s vektorima triju međusobno komplementarnih baza u $\mathcal{H}^{(2)}$ i čije su svojstvene vrijednosti ± 1.

Primjer: Vektori $\pm\hat{\mathbf{n}}$ na Blochovoj sferi pokazuju stanja

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |\Phi_\perp\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -e^{i\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

koja čine ortonormiranu bazu (raniji primjer). Konstruiramo li operator

$$\sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = (+1)\,|\Phi\rangle\,\langle\Phi| + (-1)\,|\Phi_\perp\rangle\,\langle\Phi_\perp| = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & e^{-i\varphi}\sin\vartheta \\ e^{i\varphi}\sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

u posebnim slučajevima $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ dobivamo Paulijeve matrice:

$$\begin{array}{lll} \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}} & (\vartheta = \pi/2, \varphi = 0) : & \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_1 \\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}} & (\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2) : & \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_2 \\ \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} & (\vartheta = 0) : & \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_3 \end{array}$$

Prikaz hermitskog operatora

Matrični prikaz bilo kojeg hermitskog operatora M u $\mathcal{H}^{(2)}$ možemo izraziti kao

$$M = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \sigma_i,$$

gdje je I jedinična matrica, σ_1, σ_2 i σ_3 su Paulijeve matrice, a $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ i λ_3 su realni koeficijenti.

Primjer: Operator $\sigma_{\hat{\mathbf{n}}}$ iz prethodnog primjera možemo izraziti kao

$$\sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sin\vartheta \cos\varphi \, \sigma_1 + \sin\vartheta \sin\varphi \, \sigma_2 + \cos\vartheta \, \sigma_3,$$

gdje su σ_1, σ_2 i σ_3 Paulijeve matrice, a koeficijenti $\lambda_1 = \sin\vartheta \cos\varphi$ itd. se podudaraju s komponentama vektora $\hat{\mathbf{n}}$.

Spin 1/2 kao realizacija qubita

Spin je, uz masu i električni naboj, temeljno svojstvo čestice. Po svom karakteru, spin je vektorska veličina nalik kutnoj količini gibanja.

Spin čestice je, poput električnog naboja, kvantiziran. U prirodi postoje čestice sa spinskim kvantnim brojem

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots ,$$

a sama vrijednost spina je $S = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, gdje je $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ Planckova konstanta.

Elektron, proton i neutron imaju spinski kvantni broj $s = 1/2$.

U eksperimentima je moguće mjeriti projekciju spina čestice na odabranu prostornu os (tzv. Stern–Gerlachov eksperiment).

Projekcija spina čestice spinskog kvantnog broja s na odabranu os može poprimiti $2s+1$ različitih vrijednosti. Odaberemo li z-os, moguće projekcije spina su

$$S_z = -\hbar s, -\hbar(s-1), \ldots, \hbar(s-1), \hbar s.$$

Kad se radi o čestici spinskog kvantnog broja $s = 1/2$, moguće su samo dvije projekcije spina na z-os,

$$S_z = \pm\frac{\hbar}{2},$$

te kažemo da projekcija spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z-os predstavlja moguću realizaciju qubita.

Projekciju spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na x, y i z-os opisujemo hermitskim operatorima

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_1, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3,$$

dok vektor spina takve čestice možemo opisati operatorom

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \text{gdje je} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{x}}\,\sigma_1 + \hat{\mathbf{y}}\,\sigma_2 + \hat{\mathbf{z}}\,\sigma_3.$$

Očekivani vektor spina u sustavu koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$ je

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \Phi | \mathbf{S} | \Phi \rangle = \cdots = \frac{\hbar}{2}\,\hat{\mathbf{n}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{n}}$ vektor koji na Blochovoj sferi pokazuje stanje $|\Phi\rangle$.

Kvadrat iznosa spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ možemo opisati hermitskim operatorom

$$\begin{aligned} S^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 &= \frac{\hbar^2}{4}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4}(I + I + I) \\ &= \frac{3\hbar^2}{4} I. \end{aligned}$$

Uočavamo da je svako stanje qubita (orijentacija spina) svojstveno stanje operatora S^2 uz svojstvenu vrijednost $3\hbar^2/4$.

Iznos spina čestice čiji je spinski kvantni broj $s = 1/2$ prepoznajemo kao $S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ što je upravo $\hbar\sqrt{s(s+1)}$.