Principi kvantne mehanike

Kvantna računala (SI)

13. listopada 2020.

Stanja, mjerenje i amplituda vjerojatnosti

Princip 1: Prikaz stanja vektorom u Hilbertovom prostoru

Stanje u kojem se nalazi fizički sustav prikazujemo normiranim vektorom $|\Phi\rangle$ u N-dimenzionalnom *Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}^{(N)}$, a sam vektor $|\Phi\rangle$ zovemo *vektorom stanja*.

U Hilbertovom prostoru vrijedi $\langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle^*$.

Normiranost vektora stanja $|\Phi\rangle$ podrazumijeva $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$.

Dimenzija N ovisi o složenosti sustava koji opisujemo.

Primjer: Pri opisu kvantnog računala koristimo Hilbertov prostor konačne dimenzije N. Za prikaz stanja jednog qubita koristimo $N = 2$. Za prikaz stanja n-qubitnog računala koristimo $N = 2^n$.

$|\Psi\rangle$-provjera ili mjerenje u stanju $|\Psi\rangle$

$|\Psi\rangle$-provjera je postupak dovođenja fizičkog sustava u stanje $|\Psi\rangle$ nakon kojeg slijedi detekcija koja može imati pozitivan ili negativan ishod. U slučaju pozitivne (negativne) detekcije kažemo da sustav jest (nije) "prošao $|\Psi\rangle$-provjeru" odnosno jest (nije) "izmjeren u stanju $|\Psi\rangle$".

- Ako se sustav prije provjere nalazio u stanju $|\Psi\rangle$ onda on prolazi $|\Psi\rangle$-provjeru (vjerojatnost prolaska jednaka jedinici).
- Ako se sustav prije provjere nalazio u stanju $|\Phi\rangle$ za koje vrijedi

  $$\langle\Phi|\Psi\rangle = 0$$

  onda on ne prolazi $|\Psi\rangle$-provjeru (vjerojatnost prolaska jednaka nuli).

Primjer: Ako vektor stanja $|x\rangle$ predstavlja stanje linearne polarizacije fotona s orijentacijom u x-smjeru, onda $|x\rangle$-provjeru možemo realizirati propuštanjem fotona kroz polarizator orijentiran u x-smjeru iza kojeg se nalazi detektor.

Detekciju fotona smatramo pozitivnim ishodom $|x\rangle$-provjere.

Izostanak detekcije fotona smatramo negativnim ishodom $|x\rangle$-provjere.

Princip 2: Vjerojatnost i amplituda vjerojatnosti

Vjerojatnost da sustav koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$ bude "izmjeren u stanju $|\Psi\rangle$", odnosno da on "prođe Ψ-provjeru", je

$$p(\Phi \to \Psi) = |a(\Phi \to \Psi)|^2 = |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2,$$

gdje je

$$a(\Phi \to \Psi) = \langle\Psi|\Phi\rangle$$

amplituda vjerojatnosti prelaska sustava iz stanja $|\Phi\rangle$ u stanje $|\Psi\rangle$.

Operator projekcije i Hermitski operatori

Projekcija stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$

Umnožak amplitude vjerojatnosti $a(\Phi \to \Psi) = \langle\Psi|\Phi\rangle$ prelaska sustava iz početnog stanja $|\Phi\rangle$ u konačno stanje $|\Psi\rangle$ i vektora konačnog stanja $|\Psi\rangle$,

$$|\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle \,,$$

shvaćamo kao projekciju stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$.

Projekcija stanja na neko drugo stanje jest vektor Hilbertovog prostora, ali taj vektor općenito nije normiran te sam po sebi ne predstavlja stanje sustava.

Operator projekcije (projektor)

Projekciju stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$ možemo izraziti kao rezultat djelovanja *operatora projekcije* (projektora)

$$\mathcal{P}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

na vektor $|\Phi\rangle$,

$$|\mathcal{P}_\Psi \Phi\rangle = \mathcal{P}_\Psi |\Phi\rangle = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle .$$

Primjer: Neka je stanje polarizacije fotona prikazano koristeći ortonormiranu bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ vektorom stanja $|\Phi\rangle = \mu|x\rangle + \lambda|y\rangle$. Projekcija vektora stanja $|\Phi\rangle$ na bazno stanje $|x\rangle$:

$$|\mathcal{P}_x \Phi\rangle = \mathcal{P}_x |\Phi\rangle = |x\rangle\langle x| \big(\mu|x\rangle + \lambda|y\rangle\big) = \mu|x\rangle$$

Relacija potpunosti

Neka je $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$ bilo koja ortonorminana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$. Tada zbroj projektora na vektore baze daje jedinični operator,

$$\sum_{n=1}^{N} |n\rangle \langle n| = I.$$

Gornju relaciju zovemo relacijom potpunosti.

Relacijom potpunosti nalazimo koeficijente μ_n u prikazu općenitog stanja $|\Phi\rangle$ s pomoću vektora baze $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$,

$$|\Phi\rangle = I\,|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^{N} |n\rangle \langle n|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^{N} \mu_n\,|n\rangle\,, \qquad \mu_n = \langle n|\Phi\rangle\,.$$

Komutator operatora

Komutator operatora A i B jest operator definiran izrazom

$$[A, B] = AB - BA.$$

Ako je komutator dvaju operatora jednak nuli, kažemo da ti operatori *komutiraju*, a u protivnom kažemo da *ne komutiraju*.

Primjer: Projektori na vektore ortonormirane baze međusobno komutiraju.

Primjer: Ako $\langle x|y\rangle = 0$, projektori na stanja

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle \qquad \text{i} \qquad |\alpha\rangle = \cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle$$

komutiraju samo za $\theta - \alpha = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kompatibilne i nekompatibilne provjere

Neka su $\mathcal{P}_\Phi$ i $\mathcal{P}_\Psi$ projektori na stanja Φ i Ψ. Ako ti operatori komutiraju, tj. ako

$$[\mathcal{P}_\Phi, \mathcal{P}_\Psi] = 0,$$

moguće je istovremeno provesti Φ-provjeru i Ψ-provjeru općenitog stanja sustava te kažemo da su te provjere *kompatibilne*. U suprotnom, odgovarajuće provjere nije mogće provesti istovremeno te kažemo su one *nekompatibilne*.

Primjer: Provjere povezane sa stanjima koja odgovaraju vektorima odabrane ortonormirane baze međusobno su kompatibilne.

Maksimalno nekompatibilne provjere i komplementarne baze

Neka su $\{|n\rangle\,;n=1,\ldots,N\}$ i $\{|\alpha\rangle\,;\alpha=1,\ldots,N\}$ dvije različite ortonormirane baze istog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(N)}$. Ako vrijedi

$$|\,\langle\alpha|n\rangle\,|^2=\frac{1}{N},$$

kažemo da su baze komplementarne, a za provjere koje pripadaju vektorima stanja koji pripadaju različitim bazama kažemo da su maksimalno nekompatibilne.

Primjer: Pri opisu polarizacije fotona, baza $\{|x\rangle\,,|y\rangle\}$ i baza $\{|\theta\rangle\,,|\theta+\pi/2\rangle\}$ su komplementarne baze kad je $\theta=\pi/4$.

Neka je $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$ odabrana tako da stanjima $|n\rangle$ odgovaraju vrijednosti a_n neke fizikalne veličine.

Kad bismo mnogo puta mjerili vrijednost te fizikalne veličine u sustavu koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$, srednja vrijednost mjerenja bila bi

$$\sum_n a_n p(\Phi \to n) = \sum_n a_n |\langle n|\Phi\rangle|^2 = \sum_n a_n \langle \Phi|n\rangle \langle n|\Phi\rangle \,,$$

što još možemo izraziti kao

$$\langle \Phi|M\Phi\rangle \,, \qquad \text{gdje je} \qquad M = \sum_n a_n |n\rangle \langle n|$$

operator kojim opisujemo samu fizikalnu veličinu.

Hermitski operator

Ukoliko u $\mathcal{H}^{(N)}$ postoji ortonormirana baza $\{|n\rangle\, ; n = 1, \ldots, N\}$ takva da operator M možemo izraziti kao linearnu kombinaciju projektora $\mathcal{P}_n = |n\rangle\langle n|$ uz realne korficijente a_n,

$$M = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{P}_n = \sum_{n=1}^{N} a_n |n\rangle\langle n| , \qquad a_n \in \mathbb{R},$$

onda opeator M zovemo hermitskim operatorom. Vektori $|n\rangle$ su svojstveni vektori operatora M, a realni koeficijenti a_n su odgovarajuće svojstvene vrijednosti.

Operator čije su svojstvene vrijednosti realne je hermitski operator.

Očekivana vrijednost hermitskog operatora

Neka se sustav nalazi u stanju $|\Phi\rangle$, a M neka je hermitski operator. Veličinu

$$\langle M\rangle_\Phi = \langle\Phi|M\Phi\rangle \in \mathbb{R}$$

zovemo očekivanom vrijednošću operatora M u stanju $|\Phi\rangle$.

Primjer: Ako $M = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|$ hermitski operator koji opisuje neku fizikalnu veličinu i ako se sustav nalazi u stanju $|\Phi\rangle = \sum_n \mu_n |n\rangle$, očekivana vrijednost fizikalne veličine je

$$\langle M\rangle_\Phi = \langle\Phi|M\Phi\rangle = \cdots = \sum_n a_n|\mu_n|^2.$$

Primjer: Polarizaciju fotona možemo opisati fizikalnom veličinom definiranom tako da stanju linearne polarizacije fotona u smjeru x-osi (vektor stanja $|x\rangle$) pridružimo vrijednost $+1$, a stanju linearne polarizacije u smeru y-osi (vektor stanja $|y\rangle$) pridružimo vrijednost -1. Hermitski operator kojim opisujemo tu fizikalnu veličinu je

$$M = (+1)\,|x\rangle\,\langle x| + (-1)\,|y\rangle\,\langle y|\,.$$

Ako je foton u stanju kružne polarizacije

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle),$$

očekivana vrijednost hermitskog operatora M je

$$\langle M\rangle_R = \langle R|MR\rangle = \cdots = 0.$$

Evolucija stanja u vremenu (Schrödingerova jednadžba)

Princip kvantne mehanike 3: evolucija stanja u vremenu

Evolucija stanja kvantnog sustava u vremenu,

$$|\Phi[t_1]\rangle \to |\Phi[t_2]\rangle ,$$

jest *linearna* transformacija početnog stanja sustava koja tijekom vremena *ne mijenja normu vektora stanja*.

Linearnost transformacije podrazumijeva da ju možemo izraziti s

$$|\Phi[t_2]\rangle = U[t_2, t_1] \, |\Phi[t_1]\rangle ,$$

gdje je $U[t_2, t_1]$ *operator evolucije* koji, zbog zahtjeva za očuvanjem norme vektora, ima tzv. *svojstvo unitarnosti*.

Neka svojstva unitarnog operatora vremenske evolucije $U[t_2, t_1]$:

- Unitarnost: ako $|\Phi'\rangle = U\,|\Phi\rangle$, onda $\langle\Phi'|\Phi'\rangle = \langle\Phi|\Phi\rangle$
- Ako $|\Phi'\rangle = U\,|\Phi\rangle$ i $|\Psi'\rangle = U\,|\Psi\rangle$, onda $\langle\Psi'|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle$
- Invertibilnost: postoji "inverz" U^{-1} takav da $U^{-1}U = I$
- Kompozicija operatora: $U[t_2, t_1] = U[t_2, t']U[t', t_1]$
- Također vrijede relacije:

$$U^{-1}[t_2, t_1] = U[t_1, t_2], \qquad U[t, t] = I, \qquad \dots$$

Schrödingerova jednadžba (bez izvoda)

Iz zahtjeva za unitarnošću operatora vremenske evolucije U slijedi da taj operator zadovoljava (diferencijalnu) jednadžbu gibanja

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U[t, t_0] = \hat{H}[t] U[t, t_0],$$

gdje hermitski operator $\hat{H}$ opisuje energiju sustava. Gornju jednadžbu zovemo *Schrödingerovom* jednadžbom, a operator $\hat{H}$ zovemo Hamiltonovim operatorom ili hamiltonijanom. ($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ je Planckova konstanta.)

Schrödingerovu jednadžbu se također može napisati kao

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\Phi[t]\rangle = \hat{H}[t] |\Phi[t]\rangle .$$

Primjer: Neka stanjima qubita $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju energije $\hbar\omega_0$ i $\hbar\omega_1$, pri čemu je $\omega_0 \geq \omega_1$.

Hamiltonijan (operator energije) možemo izraziti kao

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \left|0\right\rangle \left\langle 0\right| + \hbar\omega_1 \left|1\right\rangle \left\langle 1\right|$$

te stanje qubita i početne uvjete u $t = 0$ kao

$$|\Phi[t]\rangle = \mu[t] \left|0\right\rangle + \lambda[t] \left|1\right\rangle, \qquad \mu[0] = \mu_0, \qquad \lambda[0] = \lambda_0.$$

Uvrštavanjem $\hat{H}$ i $|\Phi[t]\rangle$ u Schrödingerovu jednadžbu dobivamo

$$\mathrm{i}\hbar \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu[t] \left|0\right\rangle + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda[t] \left|1\right\rangle \right) = \hbar\omega_0\mu[t] \left|0\right\rangle + \hbar\omega_1\lambda[t] \left|1\right\rangle.$$

Slijedi

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\mathrm{i}\omega_0 \mathrm{d}t, \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = -\mathrm{i}\omega_1 \mathrm{d}t,$$

te integracijom dobivamo

$$\mu[t] = \mu_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \qquad \lambda[t] = \lambda_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}.$$

Stanje qubita sada možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} |\Phi[t]\rangle &= \mu_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} |0\rangle + \lambda_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} |1\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega} t} \left(\mu_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta t/2} |0\rangle + \lambda_0 \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\delta t/2} |1\rangle \right) \end{aligned}$$

gdje je

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}, \qquad \delta = \omega_0 - \omega_1.$$