# Algoritmi

Kvantna računala (SI)

24. siječnja 2020.

# Načelo kvantnog paralelizma

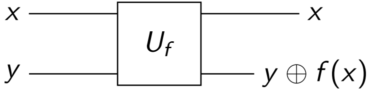
- Ako je početno stanje kvantnog računala superpozicija stanja računalne baze, onda je konačno stanje računala superpozicija odgovarajućih konačnih stanja.
- To znači da jedno jedino konačno stanje kvantnog računala može sadržavati informaciju o rezultatu koji bismo dobili za niz različitih početnih stanja.
- Mogućnost nekih kvantnih logičkih krugova (algoritama) da u jednom koraku obave račun nad više različitih vrijednosti svog argumenta zovemo *kvantnim paralelizmom*.

# Funkcija jednog qubita

U klasičnom računalu, funkciju $f : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ možemo implementirati kao unitarnu transformaciju $U_f$:

$$(x, y) \xrightarrow{U_f} (x, y \oplus f(x))$$

Prikazano simbolom:




Gornji bit zovemo ulaznim, a donji bit izlaznim bitom.

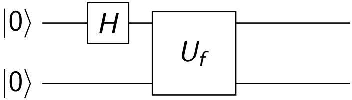
Reverzibilnost vrata odnosno unitarnost operatora slijedi iz svojstva $U_f^2 = I$:

$$(x, y) \xrightarrow{U_f^2} (x, (y \oplus f(x)) \oplus f(x)) = (x, y)$$

Kvantna vrata koja predstavljaju implementaciju funkcije $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$, tzv. *quantum oracle*, imaju svojstvo

$$U_f \left| x \otimes y \right\rangle = \left| x \otimes (y \oplus f(x)) \right\rangle, \qquad (x, y \in \{0,1\}).$$

**Primjer:** Na izlasku iz kvantnog kruga




stanje sustava je

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big( \left|0 \otimes f(0)\right\rangle + \left|1 \otimes f(1)\right\rangle \big).$$

Uočavamo da konačno stanje ovisi o (sadrži informaciju o) vrijednostima funkcije u dvama različitim vrijednostima argumenta.

# Poopćenje na $n$ ulaznih i $m$ izlaznih qubitova

- Ulazni registar koji sadrži argument funkcije $f(x)$ sastoji se od $n$ qubitova čija stanja prikazujemo bazom

$$\{|x\rangle\,;x=0,\ldots,2^n-1\},$$

odn. $|x\rangle = |x_{n-1}\cdots x_1 x_0\rangle$ pri čemu $x_{n-1},\ldots,x_1,x_0$ poprimaju vrijednosti 0 ili 1.

- Izlazni registar se sastoji od $m$ qubitova koliko je potrebno da se prikaže funkcijsku vrijednost. Koristimo bazu

$$\{|z\rangle\,;z=0,\ldots,2^m-1\},$$

odn. $|z\rangle = |z_{m-1}\cdots z_1 z_0\rangle$, ...

- Hadamardov operator proširujemo na tenzorski produkt Hadamardovih operatora. Kad je riječ o ulaznom registru imamo

$$H^{\otimes n} \left|0^{\otimes n}\right\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \, .$$

- Vrata $U_f$ koja predstavljaju implementaciju funkcije $f(x)$ definiramo kao

$$U_f \, |x \otimes z\rangle = |x \otimes (z \oplus f(x))\rangle \, ,$$

gdje je $\oplus$ operacija zbrajanja mod-2 bez prijenosa (*bitwise*).

- Unitarnost $U_f$ slijedi iz svojstva $U_f^2 = I$.

- Pokazuje se da vrijedi $U_f \left| x \otimes 0^{\otimes m} \right\rangle = \left| x \otimes f(x) \right\rangle$.
- Ulazni registar pripremamo u stanju $\left| 0^{\otimes n} \right\rangle$ te ga propuštamo kroz Hadamardova vrata. Izlazni registar pripremamo u stanju $\left| 0^{\otimes m} \right\rangle$. Na izlazu iz vrata $U_f$ imamo stanje

$$
\begin{aligned}
U_f \left( \left( H^{\otimes n} \left| 0^{\otimes n} \right\rangle \right) \otimes \left| 0^{\otimes m} \right\rangle \right) &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} U_f \left| x \otimes 0^{\otimes m} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} \left| x \otimes f(x) \right\rangle
\end{aligned}
$$

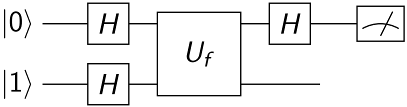
koje u sebi sadrži informaciju o vrijednostima koje funkcija $f$ poprima u svih $2^n$ različitih vrijednosti njenog argumenta.

# Osnovni oblik Deutschevog algoritma

Cilj je odrediti je li funkcija $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ "uravnotežena", $f(1) \neq f(0)$, ili je "konstantna", $f(1) = f(0)$.

Koristeći kvantni paralelizam, Deutschev algoritam rješava postavljeni problem uz samo jednu evaluaciju vrata $U_f$ tj. bez zasebnog izračuna i usporedbe vrijednosti $f(0)$ i $f(1)$.

Kvantni logički krug Deutschevog algoritma je




gdje vrata $U_f$ predstavljaju kvantnu implementaciju funkcije $f$.

Ulazni i izlazni registar pripremamo u stanjima $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

Pokazuje se da konačno stanje ulaznog registra (gornjeg qubita) možemo izraziti kao

$$\frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} |0\rangle + \frac{(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}}{2} |1\rangle .$$

Uočavamo da uz konstantnu $f$ dobivamo konačno stanje $|0\rangle$, dok za uravnoteženu $f$ dobivamo stanje $|1\rangle$.

To znači da mjerenjem stanja ulaznog registra (gornjeg qubita) možemo odrediti je li funkcija $f$ konstantna ili je uravnotežena.

Analiza toka Deutschevog algoritma:

- Početna stanja qubitova su $|0\rangle$ i $|1\rangle$ što znači da je sustav u stanju
$$|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle .$$
- Nakon prolaska parom Hadamardovih vrata sustav je u stanju
$$H|0\rangle \otimes H|1\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle = |+-\rangle .$$
- Kratkim računom možemo pokazati da za $x \in \{0, 1\}$ vrijedi
$$U_f |x-\rangle = (-1)^{f(x)} |x-\rangle .$$

- Koristeći prethodni rezultat nalazimo stanje sustava po izlasku iz $U_f$

$$U_f \left|+-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (-1)^{f(0)} \left|0\right\rangle + (-1)^{f(1)} \left|1\right\rangle \right) \otimes \left|-\right\rangle ,$$

što znači da se radi o separabilnom stanju s ulaznim registrom u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( (-1)^{f(0)} \left|0\right\rangle + (-1)^{f(1)} \left|1\right\rangle \right) .$$

- Primjenom Hadamardovog operatora na stanje ulaznog registra po izlasku iz vrata $U_f$ dobivamo konačno stanje

$$\frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} |0\rangle + \frac{(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}}{2} |1\rangle .$$

Za konstantnu funkciju $f$ qubit je u stanju $|0\rangle$, dok je za balansiranu $f$ on u stanju $|1\rangle$.

To znači da mjerenjem konačnog stanja prvog qubita određujemo je li $f$ konstantna ili balansirana uz samo jednu evaluaciju kvantne implementacije funkcije $f$.

# Pretraga nestruktururane baze

Razmatra se problem pretrage nestrukturirane baze podataka.

Neka je $f : \{0, \ldots, 2^n - 1\} \to \{0, 1\}$ takva da

$$f(x) = \delta_{xw} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x \neq w \\ 1 & \text{za} \quad x = w \end{cases}$$

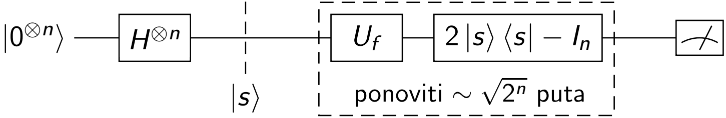
pri čemu je $w$, tzv. "winner", nepoznati broj koji želimo odrediti.

U potrazi za $w$ (pretraga baze) klasični algoritam mora izvrijedniti $f$ u prosijeku $2^n/2$ puta.

Kvantna implementacija funkcije $f$ (quantum oracle) ostvaruje se $n$-qubitnim unitarnim operatorom $U_f$ sa svojstvom

$$U_f \left| x \right\rangle = (-1)^{f(x)} \left| x \right\rangle , \qquad x = 0, \ldots , 2^n - 1.$$

Logički krug Groverovog algoritma:




Uokvireni operator zovemo Groverovim operatorom. Njegovo djelovanje ponavljamo približno $\sqrt{2^n}$ puta.

Izlazno stanje sustava se u velikoj mjeri podudara s traženim stanjem $|w\rangle$.

Analiza toka Groverovog algoritma:

- Svaki od $n$ qubitova početno u stanju $|0\rangle$ propušta se kroz Hadamardov operator. Time se sustav dovodi u stanje superpozicije svih stanja računalne baze s međusobno jednakim realnim koeficijentima,

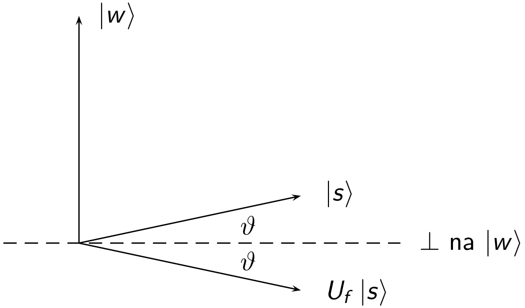
$$|s\rangle = H^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \,.$$

- Zahvaljujući realnosti koeficijenata, analizu toka algoritma moguće je provesti u Euklidovom prostoru dimenzije $2^n$.

- Uočavamo da je, za velik $n$, stanje $|s\rangle$ "gotovo okomito" na svako stanje računalne baze, pa tako i na traženo stanje $|w\rangle$.
- Možemo reći da stanje $|s\rangle$ s "plohom" koja je okomita na $|w\rangle$ (u toj "plohi" leže sva stanja okomita na $|w\rangle$ te je njena dimenzija $n-1$) "zatvara kut $\vartheta$" za koji vrijedi

$$\langle w|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \sin\vartheta \simeq \vartheta.$$

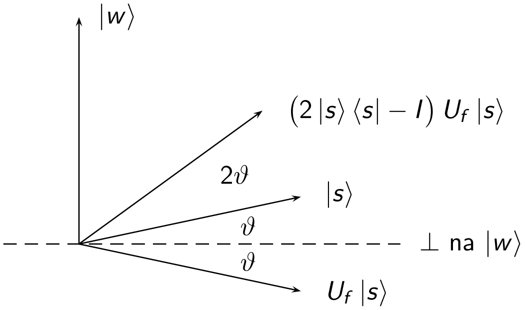
- Učinak operatora $U_f$ na općenit vektor stanja sastoji se u promjeni predznaka koeficijenta uz bazni vektor $|w\rangle$. Promatramo li stanje kao vektor u ravnini koju razapinju $|w\rangle$ i $|s\rangle$, djelovanje $U_f$ možemo shvatiti kao refleksiju stanja u osi koja je okomita na $|w\rangle$. Slika prikazuje refleksiju stanja $|s\rangle$:



- Učinak operatora

$$2\left|s\right\rangle\left\langle s\right| - I$$

možemo shvatiti kao refleksiju stanja u osi koja je je određena vektorom $|s\rangle$. Slika prikazuje refleksiju stanja $U_f\,|s\rangle$:



- S obzirom da je kompozicija dvaju refleksija u osima koje zatvaraju kut $\alpha$ istovjetna rotaciji za kut $2\alpha$, djelovanje Groverovog operatora

$$G = \left(2\left|s\right\rangle\left\langle s\right| - I\right)U_f$$

možemo shvatiti kao rotaciju stanja u ravnini razapetoj s $\left|w\right\rangle$ i $\left|s\right\rangle$ za kut

$$2\vartheta.$$

- Početno stanje sustava $\left|s\right\rangle$ zakrenuto je u odnosu na os koja je okomita na $\left|w\right\rangle$ za kut $\vartheta$, a nakon $k$ primjena Groverovog operatora, ono je zakrenuto za kut

$$\left(2k+1\right)\vartheta.$$

- Groverov operator primijenit ćemo onoliko puta koliko je potrebno da bi se početno stanje sustava $|s\rangle$ zakrenulo što je moguće bliže traženom stanju $|w\rangle$. Iz uvjeta

$$(2k+1)\vartheta \simeq \pi/2,$$

uz $2^n \gg 1$, slijedi

$$k \simeq \sqrt{2^n}$$

Pokazali smo da Groverov algoritam omogućuje nalaženje tražene vrijednosti uz $\sqrt{2^n}$ evaluacija funkcije $f$, dok je klasičnim algoritmom za to potrebno $2^n/2$ evaluacija. S obzirom da je omjer tih brojeva razmjeran $n$-toj potenciji, Groverov algoritam predstavlja eksponencijalno ubrzanje u odnosu na klasični algoritam.