Spregnuta stanja

Kvantna računala (SI)

15. studenog 2019.

Tenzorski produkt stanja, prostora i operatora

Stanje qubita A prikazujemo vektorom $|\phi_A\rangle$ u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_A$ koristeći ortonormiranu bazu $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\}$.

Stanje qubita B prikazujemo vektorom $|\phi_B\rangle$ u $\mathcal{H}_B$ ...

Ako se qubitovi A i B nalaze u stanjima $|\phi_A\rangle$ i $|\phi_B\rangle$, stanje sustava koji se sastoji od tih dvaju qubitova prikazujemo tzv. *tenzorskim produktom vektora stanja* $|\phi_A\rangle$ i $|\phi_B\rangle$, a označavamo ga s

$$|\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle\,, \qquad \text{ili jednostavnije} \qquad |\phi_A \otimes \phi_B\rangle\,.$$

Taj vektor pripada tzv. *tenzorskom produktu Hilbertovih prostora* $\mathcal{H}_A$ i $\mathcal{H}_B$ koji je sam po sebi Hilbertov prostor, a označavamo ga s

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

U Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ možemo odabrati ortonormiranu bazu $\{|ij\rangle = |i_A \otimes j_B\rangle\,;\, i,j = 0,1\}$ odnosno

$$\{ \quad |00\rangle = |0_A \otimes 0_B\rangle\,, \quad |01\rangle = |0_A \otimes 1_B\rangle\,, \\ |10\rangle = |1_A \otimes 0_B\rangle\,, \quad |11\rangle = |1_A \otimes 1_B\rangle \quad \}.$$

Općenit vektor u $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tada je

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|00\rangle + \beta\,|01\rangle + \gamma\,|10\rangle + \delta\,|11\rangle\,,$$

gdje $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Ako gornji vektor opisuje stanje kvantnog sustava, normiranost tog vektora podrazumijeva

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.$$

Primjer: Ako se qubitovi A i B nalaze u stanjima

$$|\phi_A\rangle = \lambda_A |0_A\rangle + \mu_A |1_A\rangle \quad \text{i} \quad |\phi_B\rangle = \lambda_B |0_B\rangle + \mu_B |1_B\rangle ,$$

stanje sustava prikazujemo vektorom stanja

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle = |\phi_A \otimes \phi_B\rangle &= \lambda_A\lambda_B |0_A \otimes 0_B\rangle + \lambda_A\mu_B |0_A \otimes 1_B\rangle \\ &\quad + \mu_A\lambda_B |1_A \otimes 0_B\rangle + \mu_A\mu_B |1_A \otimes 1_B\rangle \\ &= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle , \end{aligned}$$

gdje su $\alpha = \lambda_A\lambda_B$, $\beta = \lambda_A\mu_B$, $\gamma = \mu_A\lambda_B$ i $\delta = \mu_A\mu_B$.

Lako je pokazati da je uvjet normiranosti ispunjen.

Neka operator M_A djeluje na vektore stanja qubita A u $\mathcal{H}_A$, a M_B neka djeluje na vektore stanja qubita B u $\mathcal{H}_B$.

Djelovanju tih operatora na vektore stanja u $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ odgovara *tenzorski produkt operatora* koji označavamo s

$$M_A \otimes M_B.$$

Kad se sustav qubitova nalazi u stanju koje možemo izraziti tenzorskim produktom stanja qubitova A i B,

$$|\Phi\rangle = |\phi_A \otimes \phi_B\rangle\,,$$

djelovanje gornjeg operatora možemo izraziti kao

$$(M_A \otimes M_B)\,|\Phi\rangle = |M_A\phi_A \otimes M_B\phi_B\rangle\,.$$

Primjer: Neka su qubitovi A i B realizirani projekcijama spinova dviju čestica spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z-os.

Projekciju spina čestice A na z-os u sustavu dviju čestica opisujemo operatorom

$$\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I.$$

Djelovanjem tog operatora na vektore baze u $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
(\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I)\,|00\rangle &= |\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z 0_A \otimes I0_B\rangle = |\tfrac{\hbar}{2}0_A \otimes 0_B\rangle = \tfrac{\hbar}{2}\,|00\rangle \\
(\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I)\,|01\rangle &= |\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z 0_A \otimes I1_B\rangle = |\tfrac{\hbar}{2}0_A \otimes 1_B\rangle = \tfrac{\hbar}{2}\,|01\rangle \\
(\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I)\,|10\rangle &= |\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z 1_A \otimes I0_B\rangle = |-\tfrac{\hbar}{2}1_A \otimes 0_B\rangle = -\tfrac{\hbar}{2}\,|10\rangle \\
(\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I)\,|11\rangle &= |\tfrac{\hbar}{2}\sigma_z 1_A \otimes I1_B\rangle = |-\tfrac{\hbar}{2}1_A \otimes 1_B\rangle = -\tfrac{\hbar}{2}\,|11\rangle
\end{aligned}$$

Vektore ortonormirane baze $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ u $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ prikazujemo vektor–stupcima:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Općenit vektor $|\Phi\rangle$ i odgovarajući dualni vektor $\langle\Phi|$ prikazujemo s

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \langle\Phi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* & \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}.$$

Ako su $(M_A)_{ij}$, $i,j = 0,1$, i $(M_B)_{pq}$, $p,q = 0,1$, matrični elementi M_A i M_B, matrični elementi $M_A \otimes M_B$ su

$$(M_A \otimes M_B)_{ip;jq} = (M_A)_{ij}(M_B)_{pq}.$$

Primjer: Ako su

$$M_A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad M_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

onda je

$$M_A \otimes M_B = \begin{pmatrix} aM_B & bM_B \\ cM_B & dM_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{pmatrix}$$

Primjer: Tenzorski produkt Paulijeve matrice σ_z sa samom sobom odnosno prikaz operatora $M_A \otimes M_B = \sigma_z \otimes \sigma_z$:

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analognim postupkom:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer: Operator

$$M_{\text{swap}} = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B) = \frac{1}{2}(I + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

ima matrični pirkaz

$$M_{\text{swap}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

te svojstvo

$$M_{\text{swap}} \left|ij\right\rangle = \left|ji\right\rangle$$

zbog taj operator zovemo operatorom SWAP.

Primjer: Svojstveni vektori operatora

$$M_{\text{swap}} = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B)$$

su vektor

$$|\Phi_-\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

sa svojstvenom vrijednošću -1 te *triplet* vektora

$$|00\rangle\,, \qquad |\Phi_+\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \qquad |11\rangle\,,$$

sa svojstvenom vrijednošću 1.

Primjer: Zbroj projekcija spinova dviju čestica spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z-os možemo opisati operatorom

$$S_z = \frac{\hbar}{2}(\sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z).$$

Svojstveni vektori operatora S_z su $|\Phi_-\rangle$ sa svojstvenom vrijednošću 0 te vektori tripleta $\{|00\rangle, |\Phi_+\rangle, |11\rangle\}$ iz ranijeg primjera sa svojstvenim vrijednostima redom $+\hbar$, 0 i $-\hbar$.

Primjer: Svojstveni vektori operatora

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

su $|\Phi_-\rangle$ sa svojstvenom vrijednošću 0 te vektori tripleta sa svojstvenom vrijednošću $2\hbar^2$.

Separabilna i spregnuta stanja

Ako se qubitovi A i B nalaze u općenitim stanjima

$$|\phi_A\rangle = \lambda_A |0_A\rangle + \mu_A |1_A\rangle \quad \text{i} \quad |\phi_B\rangle = \lambda_B |0_B\rangle + \mu_B |1_B\rangle \,,$$

stanje sustava prikazujemo vektorom stanja

$$|\Phi\rangle = |\phi_A \otimes \phi_B\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle \,,$$

gdje je $\alpha = \lambda_A \lambda_B$, $\beta = \lambda_A \mu_B$, $\gamma = \mu_A \lambda_B$ i $\delta = \mu_A \mu_B$. Uočavamo da vrijedi

$$\alpha\delta = \beta\gamma,$$

što znači da tenzorski produkt $|\phi_A \otimes \phi_B\rangle$ *ne predstavlja potpuno općenit vektor stanja* u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$.

Primjer: U stanjima

$$|\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|01\rangle \pm |10\rangle\,\big)$$

imamo $\alpha = \delta = 0$, $\beta = 1/\sqrt{2}$ i $\gamma = \pm 1/\sqrt{2}$ te uočavamo

$$\alpha\delta \neq \beta\gamma,$$

što znači da ta stanja *nije moguće prikazati tenzorskim produktom* $|\phi_A \otimes \phi_B\rangle$, gdje su $|\phi_A\rangle$ i $|\phi_B\rangle$ vektori stanja qubitova.

Zaključujemo da tenzorski produkt vektora stanja dvaju qubitova predstavlja samo jedan dio skupa stanja koja dopušta tenzorski produkt Hilbertovih prostora kojima vektori stanja pripadaju.

Separabilna i spregnuta stanja dvaju ili više qubitova

- Stanja sustava dvaju ili više qubitova koja je moguće prikazati tenzorskim produktom vektora stanja pojedinih qubitova zovemo *separabilnim stanjima* (engl. separable states).
- Kad se sustav dvaju ili više qubitova nalazi u stanju koje nije moguće prikazati tenzorskim produktom vektora stanja pojedinih qubitova, kažemo da se sustav nalazi u *spregnutom stanju* (engl. entangled state).

Primjer: Stanja sustava dvaju qubitova:

- Iz definicije stanja $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ i $|11\rangle$ slijedi da su to separabilna stanja.
- Stanja $|\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ su spregnuta stanja (vidi prethodni primjer).

Neka se sustav qubitova A i B nalazi u spregnutom stanju

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0_A \otimes 1_B\rangle + |1_A \otimes 0_B\rangle \right),$$

a $M \otimes I$ neka je operator koji opisuje fizikalnu veličinu povezanu s qubitom A. Očekivana vrijednost u spregnutom sustavu je

$$\langle \Phi | \left(M \otimes I \right) | \Phi \rangle = \cdots = \frac{1}{2} \Big(\langle 0_A | M 0_A \rangle + \langle 1_A | M 1_A \rangle \Big).$$

Pokazuje se da ne postoji stanje qubita A opisano vektorom $|\phi_A\rangle = \lambda_A |0_A\rangle + \mu_A |1_A\rangle$ koje ima istu očekivanu vrijednost,

$$\begin{aligned} \langle \phi_A | M | \phi_A \rangle = |\lambda_A|^2 \langle 0_A | M 0_A \rangle + |\mu_A|^2 \langle 1_A | M 1_A \rangle \\ + \lambda_A^* \mu_A \langle 0_A | M 1_A \rangle + \mu_A^* \lambda_A \langle 1_A | M 0_A \rangle . \end{aligned}$$

Primjer: Energiju interakcije koja proizlazi iz relativne orijentacije spinova dviju čestica spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ možemo opisati hamiltonijanom oblika

$$\hat{H} = \hbar\omega M_{\text{swap}} = \frac{\hbar\omega}{2}(I + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B).$$

Svojstveni vektori hamiltonijana su

$$|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

sa svojstvenom vrijednošću $-\hbar\omega$ te triplet

$$|00\rangle\,, \qquad |\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \qquad |11\rangle\,,$$

sa svojstvenom vrijednošću $\hbar\omega$.

Primjer: Neka se sustav dvaju spinova u $t = 0$ nalazi u stanju

$$|\Phi[0]\rangle = |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_+\rangle + |\Phi_-\rangle)$$

koje nije spregnuto, a izrazili smo ga kao linearnu kombinaciju dvaju spregnutih stanja koja odgovaraju svojstvenim stanjima hamiltonijana iz prethodnog primjera. Vremenska evolucija tog stanja daje

$$|\Phi[t]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,|\Phi_+\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,|\Phi_-\rangle\right) = \cos\omega t\,|10\rangle - \mathrm{i}\sin\omega t\,|01\rangle\,.$$

Uočavamo da za $\omega t = \pi/4$, početno stanje koje nije bilo spregnuto prelazi u spregnuto stanje

$$|\Phi[{}^{\pi}/_{4\omega}]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|10\rangle - \mathrm{i}\,|01\rangle\,\big).$$

Teorem o nemogućnosti kvantnog kloniranja

Teorem o nemogućnosti kvantnog kloniranja kazuje da nije moguće stanje jednog kvantnog sustava prenijeti na drugi kvantni sustav.

Kada bi kloniranje bilo moguće, postojala bi unitarna transformacija koja stanje jednog qubita prenosi na drugi qubit, na primjer

$$|\chi \otimes \phi\rangle \rightarrow |\chi \otimes \chi\rangle \,.$$

Pretpostavimo li da postoji univerzalni unitarni operator U koji provodi kloniranje, imali bismo

$$U\,|\chi_1 \otimes \phi\rangle = |\chi_1 \otimes \chi_1\rangle \,, \qquad U\,|\chi_2 \otimes \phi\rangle = |\chi_2 \otimes \chi_2\rangle \,.$$

Izračunamo li sada skalarni produkt vektora na lijevim stranama prethodnih dviju jednadžbi te nakon toga skalarni produkt vektora na desnim stranama, nalazimo uvjet

$$\langle\chi_1|\chi_2\rangle = \langle\chi_1|\chi_2\rangle^2 ,$$

koji nije ispunjen za općenita stanja $|\chi_1\rangle$ i $|\chi_2\rangle$.

Zaključujemo da općenito stanje kvantnog sustava nije moguće "klonirati".