Principi kvantne mehanike

Kvantna računala (SI)

18. listopada 2019.

Principi kvantne mehanike

Princip 1: Prikaz stanja vektorom u Hilbertovom prostoru

Stanje u kojem se nalazi fizički sustav prikazujemo normiranim vektorom $|\Phi\rangle$ u N-dimenzionalnom *Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}^{(N)}$, a sam vektor $|\Phi\rangle$ zovemo *vektorom stanja*.

U Hilbertovom prostoru vrijedi $\langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle^*$.

Normiranost vektora stanja $|\Phi\rangle$ podrazumijeva $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$.

Dimenzija N ovisi o složenosti sustava koji opisujemo.

Primjer: Pri opisu kvantnog računala koristimo Hilbertov prostor konačne dimenzije N. Za prikaz stanja jednog qubita koristimo $N = 2$. Za prikaz stanja n-qubitnog računala koristimo $N = 2^n$.

Mjerenje i $|\Psi\rangle$-provjera

$|\Psi\rangle$-provjera je postupak dovođenja fizičkog sustava u stanje $|\Psi\rangle$ nakon kojeg slijedi detekcija koja može imati pozitivan ili negativan ishod. U slučaju pozitivne (negativne) detekcije kažemo da sustav jest (nije) "prošao $|\Psi\rangle$-provjeru" odnosno jest (nije) "izmjeren u stanju $|\Psi\rangle$".

- Ako se sustav prije provjere nalazio u stanju $|\Psi\rangle$ onda on prolazi $|\Psi\rangle$-provjeru.
- Ako se sustav prije provjere nalazio u stanju $|\Phi\rangle$ za koje vrijedi

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = 0$$

  onda on ne prolazi $|\Psi\rangle$-provjeru.

Primjer: Ako vektor stanja $|x\rangle$ predstavlja stanje linearne polarizacije fotona s orijentacijom u x-smjeru, onda $|x\rangle$-provjeru možemo realizirati propuštanjem fotona kroz polarizator orijentiran u x-smjeru iza kojeg se nalazi detektor.

Detekciju fotona smatramo pozitivnim ishodom $|x\rangle$-provjere.

Izostanak detekcije fotona smatramo negativnim ishodom $|x\rangle$-provjere.

Princip 2: Vjerojatnost i amplituda vjerojatnosti

Vjerojatnost da sustav koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$ bude "izmjeren u stanju $|\Psi\rangle$", odnosno da on "prođe Ψ-provjeru", je

$$p(\Phi \to \Psi) = |a(\Phi \to \Psi)|^2 = |\langle\Psi|\Phi\rangle|^2,$$

gdje je

$$a(\Phi \to \Psi) = \langle\Psi|\Phi\rangle$$

amplituda vjerojatnosti prelaska sustava iz stanja $|\Phi\rangle$ u stanje $|\Psi\rangle$.

Operator projekcije i Hermitski operatori

Projekcija stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$

Umnožak amplitude vjerojatnosti $a(\Phi \to \Psi) = \langle\Psi|\Phi\rangle$ prelaska sustava iz početnog stanja $|\Phi\rangle$ u konačno stanje $|\Psi\rangle$ i vektora konačnog stanja $|\Psi\rangle$,

$$|\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle \,,$$

shvaćamo kao projekciju stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$.

Projekcija stanja na neko drugo stanje jest vektor Hilbertovog prostora, ali taj vektor općenito nije normiran te sam po sebi ne predstavlja stanje sustava.

Operator projekcije (projektor)

Projekciju stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$ možemo izraziti kao rezultat djelovanja *operatora projekcije* (projektora)

$$\mathcal{P}_\Psi = |\Psi\rangle \langle\Psi|$$

na vektor $|\Phi\rangle$,

$$|\mathcal{P}_\Psi \Phi\rangle = \mathcal{P}_\Psi |\Phi\rangle = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle .$$

Primjer: Neka je stanje polarizacije fotona prikazano koristeći ortonormiranu bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ vektorom stanja $|\Phi\rangle = \mu |x\rangle + \lambda |y\rangle$. Projekcija vektora stanja $|\Phi\rangle$ na bazno stanje $|x\rangle$:

$$|\mathcal{P}_x \Phi\rangle = \mathcal{P}_x |\Phi\rangle = |x\rangle \langle x| \left(\mu |x\rangle + \lambda |y\rangle\right) = \mu |x\rangle$$

Relacija potpunosti

Neka je $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$ bilo koja ortonorminana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$. Tada zbroj projektora na vektore baze daje jedinični operator,

$$\sum_{n=1}^{N} |n\rangle \langle n| = I.$$

Gornju relaciju zovemo relacijom potpunosti.

Relacijom potpunosti nalazimo koeficijente μ_n u prikazu općenitog stanja $|\Phi\rangle$ s pomoću vektora baze $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$,

$$|\Phi\rangle = I\,|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^{N} |n\rangle \langle n|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^{N} \mu_n\,|n\rangle\,, \qquad \mu_n = \langle n|\Phi\rangle\,.$$

Komutator operatora

Komutator operatora A i B jest operator definiran izrazom

$$[A, B] = AB - BA.$$

Ako je komutator dvaju operatora jednak nuli, kažemo da ti operatori *komutiraju*, a u protivnom kažemo da *ne komutiraju*.

Primjer: Projektori na vektore ortonormirane baze međusobno komutiraju.

Primjer: Ako $\langle x|y\rangle = 0$, projektori na stanja

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle \qquad \text{i} \qquad |\alpha\rangle = \cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle$$

komutiraju samo za $\theta - \alpha = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kompatibilne i nekompatibilne provjere

Neka su $\mathcal{P}_\Phi$ i $\mathcal{P}_\Psi$ projektori na stanja Φ i Ψ. Ako ti operatori komutiraju, tj. ako

$$[\mathcal{P}_\Phi, \mathcal{P}_\Psi] = 0,$$

moguće je istovremeno provesti Φ-provjeru i Ψ-provjeru općenitog stanja sustava te kažemo da su te provjere *kompatibilne*. U suprotnom, odgovarajuće provjere nije mogće provesti istovremeno te kažemo su one *nekompatibilne*.

Primjer: Provjere povezane sa stanjima koja odgovaraju vektorima odabrane ortonormirane baze međusobno su kompatibilne.

Maksimalno nekompatibilne provjere i komplementarne baze

Neka su $\{|n\rangle\,; n = 1, \dots, N\}$ i $\{|\alpha\rangle\,; \alpha = 1, \dots, N\}$ dvije različite ortonormirane baze istog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(N)}$. Ako vrijedi

$$|\langle\alpha|n\rangle|^2 = \frac{1}{N},$$

kažemo da su baze komplementarne, a za provjere koje pripadaju vektorima stanja koji pripadaju različitim bazama kažemo da su maksimalno nekompatibilne.

Primjer: Pri opisu polarizacije fotona, baza $\{|x\rangle\,, |y\rangle\}$ i baza $\{|\theta\rangle\,, |\theta + \pi/2\rangle\}$ su komplementarne baze kad je $\theta = \pi/4$.

Neka je $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$ odabrana tako da stanjima $|n\rangle$ odgovaraju vrijednosti a_n neke fizikalne veličine.

Kad bismo mnogo puta mjerili vrijednost te fizikalne veličine u sustavu koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$, srednja vrijednost mjerenja bila bi

$$\sum_n a_n p(\Phi \to n) = \sum_n a_n |\langle n|\Phi\rangle|^2 = \sum_n a_n \langle\Phi|n\rangle \langle n|\Phi\rangle \,,$$

što još možemo izraziti kao

$$\langle\Phi|M\Phi\rangle\,, \qquad \text{gdje je} \qquad M = \sum_n a_n |n\rangle \langle n|$$

operator kojim opisujemo samu fizikalnu veličinu.

Hermitski operator

Ukoliko u $\mathcal{H}^{(N)}$ postoji ortonormirana baza $\{|n\rangle\,; n = 1, \ldots, N\}$ takva da operator M možemo izraziti kao linearnu kombinaciju projektora $\mathcal{P}_n = |n\rangle\langle n|$ uz realne korficijente a_n,

$$M = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{P}_n = \sum_{n=1}^{N} a_n |n\rangle\langle n|\,, \qquad a_n \in \mathbb{R},$$

onda opeator M zovemo hermitskim operatorom. Vektori $|n\rangle$ su svojstveni vektori operatora M, a realni koeficijenti a_n su odgovarajuće svojstvene vrijednosti.

Operator čije su svojstvene vrijednosti realne je hermitski operator.

Očekivana vrijednost hermitskog operatora

Neka se sustav nalazi u stanju $|\Phi\rangle$, a M neka je hermitski operator. Veličinu

$$\langle M\rangle_\Phi = \langle \Phi | M\Phi\rangle \in \mathbb{R}$$

zovemo očekivanom vrijednošću operatora M u stanju $|\Phi\rangle$.

Primjer: Ako $M = \sum_n a_n |n\rangle\langle n|$ hermitski operator koji opisuje neku fizikalnu veličinu i ako se sustav nalazi u stanju $|\Phi\rangle = \sum_n \mu_n |n\rangle$, očekivana vrijednost fizikalne veličine je

$$\langle M\rangle_\Phi = \langle \Phi | M\Phi\rangle = \cdots = \sum_n a_n |\mu_n|^2.$$

Primjer: Polarizaciju fotona možemo opisati fizikalnom veličinom definiranom tako da stanju linearne polarizacije fotona u smjeru x-osi (vektor stanja $|x\rangle$) pridružimo vrijednost $+1$, a stanju linearne polarizacije u smeru y-osi (vektor stanja $|y\rangle$) pridružimo vrijednost -1. Hermitski operator kojim opisujemo tu fizikalnu veličinu je

$$M = (+1)\,|x\rangle\,\langle x| + (-1)\,|y\rangle\,\langle y|\,.$$

Ako je foton u stanju kružne polarizacije

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle),$$

očekivana vrijednost hermitskog operatora M je

$$\langle M\rangle_R = \langle R|MR\rangle = \cdots = 0.$$

Evolucija stanja u vremenu (Schrödingerova jednadžba)

Princip kvantne mehanike 3: evolucija stanja u vremenu

Evolucija stanja kvantnog sustava u vremenu,

$$|\Phi[t_1]\rangle \to |\Phi[t_2]\rangle \, ,$$

jest *linearna* transformacija početnog stanja sustava koja tijekom vremena *ne mijenja normu vektora stanja*.

Linearnost transformacije podrazumijeva da ju možemo izraziti s

$$|\Phi[t_2]\rangle = U[t_2, t_1] \, |\Phi[t_1]\rangle \, ,$$

gdje je $U[t_2, t_1]$ *operator evolucije* koji, zbog zahtjeva za očuvanjem norme vektora, ima tzv. *svojstvo unitarnosti*.

Neka svojstva unitarnog operatora vremenske evolucije $U[t_2, t_1]$:

- Unitarnost: ako $|\Phi'\rangle = U\,|\Phi\rangle$, onda $\langle\Phi'|\Phi'\rangle = \langle\Phi|\Phi\rangle$
- Ako $|\Phi'\rangle = U\,|\Phi\rangle$ i $|\Psi'\rangle = U\,|\Psi\rangle$, onda $\langle\Psi'|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle$
- Invertibilnost: postoji "inverz" U^{-1} takav da $U^{-1}U = I$
- Kompozicija operatora: $U[t_2, t_1] = U[t_2, t']U[t', t_1]$
- Također vrijede relacije:

$$U^{-1}[t_2, t_1] = U[t_1, t_2], \qquad U[t, t] = I, \qquad \ldots$$

Schrödingerova jednadžba (bez izvoda)

Iz zahtjeva za unitarnošću operatora vremenske evolucije U slijedi da taj operator zadovoljava (diferencijalnu) jednadžbu gibanja

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U[t, t_0] = \hat{H}[t] U[t, t_0],$$

gdje hermitski operator $\hat{H}$ opisuje energiju sustava. Gornju jednadžbu zovemo *Schrödingerovom* jednadžbom, a operator $\hat{H}$ zovemo Hamiltonovim operatorom ili hamiltonijanom.
($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ je Planckova konstanta.)

Schrödingerovu jednadžbu se također može napisati kao

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\Phi[t]\rangle = \hat{H}[t] \, |\Phi[t]\rangle \, .$$

Primjer: Neka stanjima qubita $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju energije $\hbar\omega_0$ i $\hbar\omega_1$, pri čemu je $\omega_0 \geq \omega_1$.

Hamiltonijan (operator energije) možemo izraziti kao

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 |0\rangle \langle 0| + \hbar\omega_1 |1\rangle \langle 1|$$

te stanje qubita i početne uvjete u $t = 0$ kao

$$|\Phi[t]\rangle = \mu[t] |0\rangle + \lambda[t] |1\rangle, \qquad \mu[0] = \mu_0, \qquad \lambda[0] = \lambda_0.$$

Uvrštavanjem $\hat{H}$ i $|\Phi[t]\rangle$ u Schrödingerovu jednadžbu dobivamo

$$\mathrm{i}\hbar \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu[t] |0\rangle + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda[t] |1\rangle \right) = \hbar\omega_0\mu[t] |0\rangle + \hbar\omega_1\lambda[t] |1\rangle .$$

Slijedi

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -\mathrm{i}\omega_0 \mathrm{d}t, \qquad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = -\mathrm{i}\omega_1 \mathrm{d}t,$$

te integracijom dobivamo

$$\mu[t] = \mu_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}, \qquad \lambda[t] = \lambda_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}.$$

Stanje qubita sada možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} |\Phi[t]\rangle &= \mu_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t} |0\rangle + \lambda_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} |1\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega} t} \left(\mu_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta t/2} |0\rangle + \lambda_0 \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\delta t/2} |1\rangle \right) \end{aligned}$$

gdje je

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}, \qquad \delta = \omega_0 - \omega_1.$$

Vektori, dualni vektori i skalarni produkt ($N = 2$)

Vektore ortonormirane baze $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ u $\mathcal{H}^{(2)}$ prikazujemo vektor-stupcima

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Općeniti vektor je tada

$$|\Phi\rangle = \lambda |0\rangle + \mu |1\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

a odgovarajući dualni vektor (bra-simbol) prikazuje se vektor-retkom

$$\langle\Phi| = \lambda^* \langle 0| + \mu^* \langle 1| = \begin{pmatrix} \lambda^* & \mu^* \end{pmatrix}.$$

Skalarni produkt vektora

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

može se izračunati *unutarnjim množenjem* vektor-retka koji prikazuje dualni vektor $\langle\Psi|$ i vektor-stupca koji prikazuje vektor $|\Phi\rangle$

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \nu^*\lambda + \sigma^*\mu.$$

Primjer: Projekcija $|\Phi\rangle$ na $|\Psi\rangle$:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} (\nu^*\lambda + \sigma^*\mu)$$
$$= \begin{pmatrix} |\nu|^2\lambda + \nu\sigma^*\mu \\ \sigma\nu^*\lambda + |\sigma|^2\mu \end{pmatrix}$$

Operator projekcije ($N = 2$)

Neka su

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

vektori. Operator projekcije na stanje prikazano vektorom $|\Psi\rangle$ prikazuje se matricom koju dobivamo tzv. *vanjskim množenjem* vektora-stupca i vektora-retka kojima prikazujemo $|\Psi\rangle$ i $\langle\Psi|$,

$$\mathcal{P}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu^* & \sigma^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\nu|^2 & \nu\sigma^* \\ \sigma\nu^* & |\sigma|^2 \end{pmatrix}$$

Projekciju vektora $|\Phi\rangle$ na vektor $|\Psi\rangle$ dobivamo množenjem matrice i vektora:

$$\mathcal{P}_\Psi |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} |\nu|^2 & \nu\sigma^* \\ \sigma\nu^* & |\sigma|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\nu|^2\lambda + \nu\sigma^*\mu \\ \sigma\nu^*\lambda + |\sigma|^2\mu \end{pmatrix}$$

Primjer: Projektori na bazna stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$:

$$\mathcal{P}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zbroj projektora daje operator identiteta:

$$\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Primjer: Stanje desne kružne polarizacije fotona i projektor na to stanje (koristimo $|x\rangle = |0\rangle$, $|y\rangle = |1\rangle$):

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_R = |R\rangle\langle R| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$$

Stanje lijeve kružne polarizacije i projektor na to stanje:

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - \mathrm{i}\,|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_L = |L\rangle\langle L| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}$$

Uočava se $\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = I$.

Hermitski operator i hermitsko konjugiranje

Koristimo li u $\mathcal{H}^{(N)}$ bazu $\{|n\rangle\,; n = 1, \dots, N\}$, vektor stanja $|n\rangle$ dogovorno prikazujemo vektor-stupcem koji svuda ima nule osim na n-tom mjestu odozgo gdje ima jedinicu. j-ti element tog vektor-stupca možemo izraziti kao

$$(|n\rangle)_j = \delta_{jn}.$$

Dualni vektor (bra) prikazujemo vektor-retkom $(\langle m|)_i = \delta_{mi}$.

Ako je M općenit operator u $\mathcal{H}^{(N)}$, element u m-tom retku i n-tom stupcu matričnog prikaza tog operatora se može izraziti kao

$$(M)_{mn} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{mi}\, M_{ij}\, \delta_{jn} = \langle m|\, M \,|n\rangle\, .$$

Neka je

$$M = \sum_{n=1}^{N} a_n |n\rangle \langle n| , \qquad a_n \in \mathbb{R},$$

Hermitski operator. U bazi $\{|n\rangle ; n = 1, \dots , N\}$ taj je operator prikazan diagonalnom matricom pri čemu se elementi na dijagonali podudaraju sa svojstvenim vrijednostima operatora,

$$(M)_{mn} = \langle m| M |n\rangle = a_m \delta_{mn}.$$

U općenitoj bazi $\{|\alpha\rangle, \alpha = 1, \ldots, N\}$ čiji se vektori ne podudaraju sa svojstvenim vektorima hermitskog operatora M, elementi matrice kojom prikazujemo taj operator imaju svojstvo

$$(M)_{\alpha\beta} = \langle\alpha| M |\beta\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \langle\alpha|n\rangle \langle n|\beta\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n \langle\beta|n\rangle^* \langle n|\alpha\rangle^*$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \langle\beta|n\rangle \langle n|\alpha\rangle \right)^* = \langle\beta| M |\alpha\rangle^* = ((M)_{\beta\alpha})^*.$$

To znači da matrica koja prikazuje hermitski operator ostaje nepromijenjena ako ju transponiramo i kompleksno konjugiramo.

Hermitsko konjugiranje matrice

Hermitsko konjugiranje matrice jest transformacija koja se sastoji od kompleksne konjugacije i transpozicije matrice (redoslijed opracija kompleksne konjugacije i transpozicije nije od važnosti). Hermitsko konjugiranje matrice M obilježavamo simbolom $\dagger$ ("bodež"),

$$M^\dagger = (M^*)^T = (M^T)^*,$$

dok za komponente matrice vrijedi $(M^\dagger)_{ij} = (M^*)_{ji} = ((M)_{ji})^*$.

Matrični prikaz hermitskog operatora

Matrični prikaz hermitskog operatora M invarijantan je na operaciju hermitskog konjugiranja,

$$M^\dagger = M \qquad \text{(hermitski operator)}.$$

Prikaz stanja qubita na Blochovoj sferi

Blochova sfera

Potpuno općenito stanje qubita može se izraziti vektorom stanja

$$|\Phi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \cos\frac{\vartheta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \sin\frac{\vartheta}{2}\,|1\rangle$$

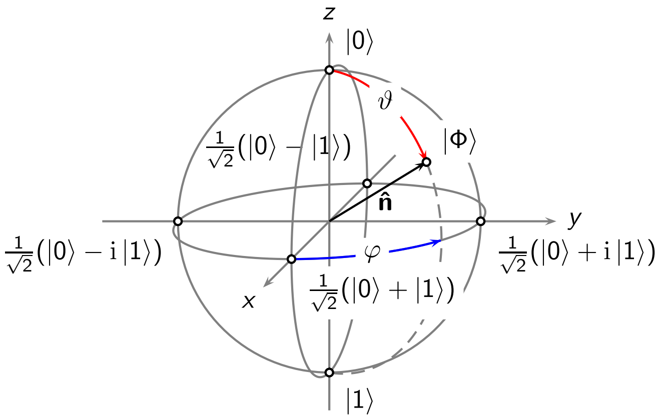
gdje su $|0\rangle$ i $|1\rangle$ vektori ortonormirane baze u $\mathcal{H}^{(2)}$, a parametre

$$0 \leq \varphi < 2\pi \qquad \text{i} \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

možemo shvatiti kao koordinate točke na tzv. *Blochovoj sferi*.

Gornji zapis osigurava normiranost vektora stanja $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ te uzima u obzir činjenicu da $|\Phi\rangle$ i $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\,|\Phi\rangle$ predstavljaju isto stanje.

Prikaz stanja $|\Phi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \cos\frac{\vartheta}{2}\ |0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \sin\frac{\vartheta}{2}\ |1\rangle$ na BS:



3D-vektor: $\hat{\mathbf{n}} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\vartheta\,\mathbf{k}$

3D-vektor $\hat{\mathbf{n}} = \sin\vartheta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\vartheta\,\mathbf{k}$ pokazuje točku na Blochovoj sferi kojoj odgovara vektor stanja

$$|\Phi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}\,|1\rangle\,.$$

3D-vektor $-\hat{\mathbf{n}}$ koji dobivamo zamjenom $\vartheta \to \pi - \vartheta$ i $\varphi \to \varphi \pm \pi$ pokazuje suprotnu točku na BS kojoj odgovara vektor stanja

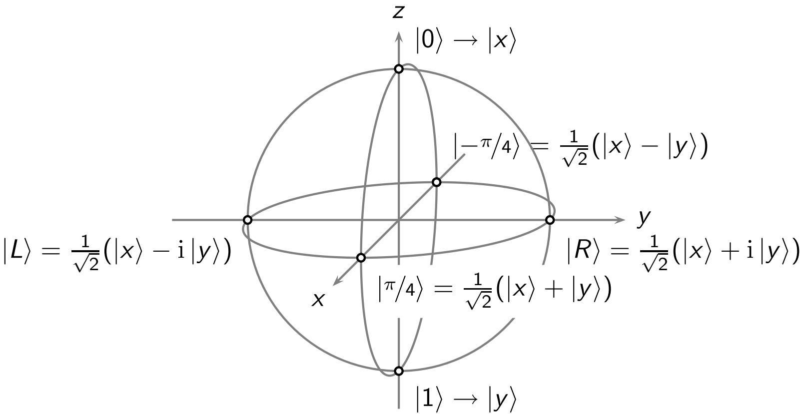
$$\begin{aligned} |\Phi_\perp\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi\pm\pi)/2}\cos\frac{\pi-\vartheta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi\pm\pi)/2}\sin\frac{\pi-\vartheta}{2}\,|1\rangle \\ &= \mp\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}\,|0\rangle - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,|1\rangle\right). \end{aligned}$$

Vektori stanja $|\Phi\rangle$ i $|\Phi_\perp\rangle$ zadovoljavaju relacije ortonormiranosti te predstavljaju moguć odabir ortonormirane baze u $\mathcal{H}^{(2)}$.

Stanja qubita prikazana na Blochovoj sferi:

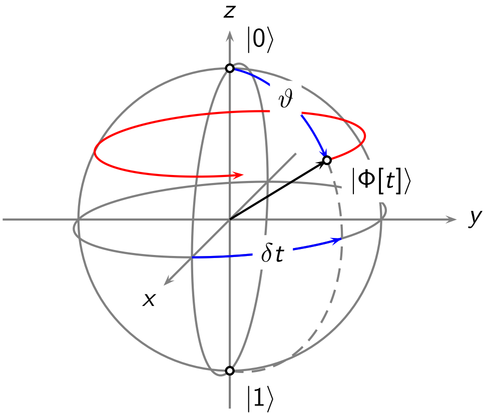
- Bilo koji par suprotnih točaka na Blochovoj sferi predstavlja moguć odabir vektora ortonormirane baze.
- Provjere stanja koja se nalaze na “ekvatoru” Blochove sfere koji je određen odabirom baze (polova) maksimalno su nekompatibilne sa provjerama stanja baze.
- Bilo koji par suprotnih točaka na ekvatoru predstavlja bazu koja je komplementarna s bazom koja određuje ekvator.
- Istovremeno je moguće odabrati tri međusobno komplementarne baze. (To mogu biti, na primjer, parovi točaka u kojima x, y i z-os probadaju Blochovu sferu.)

Primjer: Prikaz stanja polarizacije fotona na BS:



Primjer: Ako stanjima $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju energije $\hbar\omega_0$ i $\hbar\omega_1$,

$$|\Phi[t]\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta t/2} \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta t/2} \sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle\,, \qquad \delta = \omega_0 - \omega_1 .$$



Paulijeve matrice i prikaz hermitskog operatora

Projektori na vektore stanja $|0\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $|1\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ koji se nalaze u točkama u kojima z-os probada Blochovu sferu su

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Koristeći te projektore sastavljamo hermitski operator

$$\sigma_z = (+1)\,|0\rangle\langle 0| \;+\; (-1)\,|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Svojstveni vektori tog operatora su $|0\rangle$ (točka Blochove sfere u kojoj ju probada pozitivan krak z-osi) sa svojstvenom vrijednošću 1 te $|1\rangle$ (točka BS u kojoj ju probada negativan krak z-osi) sa svojstvenom vrijednošću -1.

Sličnim postupkom sastavljamo hermitske operatore čija svojstvena stanja odgovaraju parovima točaka na Blochovoj sferi u kojima ju probadaju x odnosno y-os i čije su svojstvene vrijednosti ± 1. Matrični prikazi tih operatora su

$$\sigma_x = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \sigma_y = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Uobičajene su oznake

$$\sigma_1 = \sigma_x, \qquad \sigma_2 = \sigma_y, \qquad \sigma_3 = \sigma_z,$$

a može se pokazati da vrijede relacije

$$\sigma_i^2 = I, \qquad \sigma_1\sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3, \qquad \sigma_2\sigma_3 = \mathrm{i}\sigma_1, \qquad \sigma_3\sigma_1 = \mathrm{i}\sigma_2.$$

Paulijeve ili σ-matrice

Matrice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zovemo *Paulijevim* ili *σ-matricama*. One predstavljaju hermitske operatore u $\mathcal{H}^{(2)}$ čiji se svojstveni vektori podudaraju s vektorima triju međusobno komplementarnih baza u $\mathcal{H}^{(2)}$ i čije su svojstvene vrijednosti ± 1.

Primjer: Vektori $\pm\hat{\mathbf{n}}$ na Blochovoj sferi pokazuju stanja

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |\Phi_\perp\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2} \\ -e^{i\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

koja čine ortonormiranu bazu (raniji primjer). Konstruiramo li operator

$$\sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = (+1)\,|\Phi\rangle\langle\Phi| + (-1)\,|\Phi_\perp\rangle\langle\Phi_\perp| = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & e^{-i\varphi}\sin\vartheta \\ e^{i\varphi}\sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix},$$

u posebnim slučajevima $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dobivamo Paulijeve matrice:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{i} && (\vartheta = \pi/2, \varphi = 0) &&: && \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_1 \\ \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{j} && (\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2) &&: && \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_2 \\ \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{k} && (\vartheta = 0) &&: && \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_3 \end{aligned}$$

Prikaz hermitskog operatora

Matrični prikaz bilo kojeg hermitskog operatora M u $\mathcal{H}^{(2)}$ možemo izraziti kao

$$M = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \sigma_i,$$

gdje je I jedinična matrica, σ_1, σ_2 i σ_3 su Paulijeve matrice, a $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ i λ_3 su realni koeficijenti.

Primjer: Operator $\sigma_{\hat{\mathbf{n}}}$ iz prethodnog primjera možemo izraziti kao

$$\sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sin\vartheta \cos\varphi \, \sigma_1 + \sin\vartheta \sin\varphi \, \sigma_2 + \cos\vartheta \, \sigma_3,$$

gdje su σ_1, σ_2 i σ_3 Paulijeve matrice, a koeficijenti $\lambda_1 = \sin\vartheta\cos\varphi$ itd. se podudaraju s komponentama vektora $\hat{\mathbf{n}}$.

Spin 1/2 kao realizacija qubita

Spin je, uz masu i električni naboj, temeljno svojstvo čestice. Po svom karakteru, spin je vektorska veličina nalik kutnoj količini gibanja.

Spin čestice je, poput električnog naboja, kvantiziran. U prirodi postoje čestice sa spinskim kvantnim brojem

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots,$$

a sama vrijednost spina je $S = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, gdje je $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ Planckova konstanta.

Elektron, proton i neutron imaju spinski kvantni broj $s = 1/2$.

U eksperimentima je moguće mjeriti projekciju spina čestice na odabranu prostornu os (tzv. Stern–Gerlachov eksperiment).

Projekcija spina čestice spinskog kvantnog broja s na odabranu os može poprimiti $2s+1$ različitih vrijednosti. Odaberemo li z-os, moguće projekcije spina su

$$S_z = -\hbar s, -\hbar(s-1), \ldots, \hbar(s-1), \hbar s.$$

Kad se radi o čestici spinskog kvantnog broja $s = 1/2$, moguće su samo dvije projekcije spina na z-os,

$$S_z = \pm\frac{\hbar}{2},$$

te kažemo da projekcija spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z-os predstavlja moguću realizaciju qubita.

Projekciju spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na x, y i z-os opisujemo hermitskim operatorima

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_1, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2, \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3,$$

dok vektor spina takve čestice možemo opisati operatorom

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \text{gdje je} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}\,\sigma_1 + \mathbf{j}\,\sigma_2 + \mathbf{k}\,\sigma_3.$$

Očekivani vektor spina u sustavu koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$ je

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \Phi | \mathbf{S} | \Phi \rangle = \cdots = \frac{\hbar}{2}\,\hat{\mathbf{n}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{n}}$ vektor koji na Blochovoj sferi pokazuje stanje $|\Phi\rangle$.

Kvadrat iznosa spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ možemo opisati hermitskim operatorom

$$\begin{aligned} S^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 &= \frac{\hbar^2}{4} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left(I + I + I \right) \\ &= \frac{3\hbar^2}{4} I. \end{aligned}$$

Uočavamo da je svako stanje qubita (orijentacija spina) svojstveno stanje operatora S^2 uz svojstvenu vrijednost $3\hbar^2/4$.

Iznos spina čestice čiji je spinski kvantni broj $s = 1/2$ prepoznajemo kao $S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ što je upravo $\hbar\sqrt{s(s+1)}$.