Međuispit iz Kvantnih računala (29. studenog 2018.)

Ime, prezime i JMBAG:

Uputa:

- Ispit se sastoji od 10 zadataka najčešće u obliku pitanja s ponuđenim odgovorima.
- Odgovore koje smatrate točnima označite (zacrnite) na posebnom obrascu. Mogu se pojaviti zadaci u kojima je potrebno označiti više od jednog ponuđenog odgovora.
- U praznom prostoru pored zadatka ili na dodatnim papirima napišite obrazloženje ili računski postupak koji vas je doveo do rješenja koje smatrate točnim.
- Točno riješeni zadatak donosi 4 boda. Kazneni (negativni) bodovi se ne obračunavaju.

Notacija i terminologija:

- Vektori $|0\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $|1\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$.
- Pri realizaciji qubita stanjima polarizacije fotona, vektori $|0\rangle = |x\rangle$ i $|1\rangle = |y\rangle$ odgovaraju stanjima linearne polarizacije u x-smjeru i u y-smjeru, bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ obilježavamo simbolom $\bigoplus$, a bazu $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm |y\rangle)\}$ obilježavamo simbolom $\bigotimes$.
- Pri realizaciji qubita projekcijom spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z-os uzimamo da $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovarju projekcijama $\hbar/2$ i $-\hbar/2$.
- Računalnu bazu u prostoru stanja dvaju qubitova obilježavamo s $\{|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle\,; i,j = 0,1\}$.

1 Koji od navedenih vektora nije/nisu normiran/i? // *Which of the following vectors is/are not normalized?*

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \mathrm{i}\frac{2}{\sqrt{5}}|1\rangle$

(c) $\frac{3}{5}|0\rangle - \mathrm{i}\frac{2}{5}|1\rangle$ **točno**

(d) $\frac{1}{\sqrt{10}}|0\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}}|1\rangle$

(e) $\frac{5}{\sqrt{29}}|0\rangle - \frac{2}{\sqrt{29}}|1\rangle$

2 Koja dva od navedenih vektora čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$? // *Which two of the following vectors comprise a orthonormal basis in $\mathcal{H}^{(2)}$?*

(a) $\frac{1}{\sqrt{13}}(2|0\rangle + 3|1\rangle)$

(b) $\frac{1}{\sqrt{13}}(3|0\rangle + 2|1\rangle)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{13}}(2|0\rangle + 3\mathrm{i}|1\rangle)$ **točno**

(d) $\frac{1}{\sqrt{13}}(3|0\rangle + 2\mathrm{i}|1\rangle)$

(e) $\frac{1}{\sqrt{13}}(3|0\rangle - 2\mathrm{i}|1\rangle)$ **točno**

3 Koji (dva ili više) od navedenih vektora predstavljaju isto stanje kvantnog bita? // *Which (two or more) of the following kets represent the same qubit state?*

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ **točno**

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle - |1\rangle)$ **točno**

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - \mathrm{i}|1\rangle)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \mathrm{i}|1\rangle)$

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}|0\rangle + \mathrm{i}|1\rangle)$ **točno**

4 Stanje kvantnog bita je: // *Qubit state is:*

$$\cos\frac{\vartheta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\frac{\vartheta}{2}|1\rangle\,, \qquad \vartheta,\varphi\in\mathbb{R}$$

Vjerojatnost da taj kvantni bit bude izmjeren u stanju $|1\rangle$ // *The probability that this qubit is measured in the state* $|1\rangle$

(a) ovisi i o ϑ i o φ. // *depends on both* φ *and* ϑ.

(b) ovisi samo o φ. // *depends only on* φ.

(c) ovisi samo o ϑ. // *depends only on* ϑ. **točno**

(d) ne ovisi ni o ϑ ni o φ. // *does not depend on* φ *or* ϑ.

(e) ne može se odrediti. // *does not compute.*

5 Koje od navedenih stanja kvantnog bita ima najveću vjerojatnost nalaženja u stanju $|0\rangle$? // *Which of the following states has the highest probability of being measured in the state* $|0\rangle$*?*

(a) $\frac{1}{13}(12\mathrm{i}\,|0\rangle + 5\,|1\rangle)$ **točno**

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,|0\rangle - \mathrm{i}\,|1\rangle)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle - \sqrt{2}\,|1\rangle)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}\,|0\rangle + 2\mathrm{i}\,|1\rangle)$

(e) $\frac{1}{3}(\sqrt{5}\,|0\rangle - 2\mathrm{i}\,|1\rangle)$

6 Stanje kvantnog bita je: // *The state of a qubit is:*

$$|\psi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\cos\frac{\vartheta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\sin\frac{\vartheta}{2}|1\rangle$$

Djelovanje operatora Pauli-Z (σ_z ili σ_3) na to stanje istovjetno je zamjeni // *Action of the Pauli-Z operator on that state (also denoted* σ_z *or* σ_3*) is equivalent to the change*

(a) $\varphi \to \varphi \pm 2\pi$

(b) $\varphi \to \varphi \pm \pi$ **točno**

(c) $\vartheta \to \vartheta \pm 2\pi$

(d) $\vartheta \to \vartheta \pm \pi$

(e) $\vartheta \to \pi - \vartheta$

7 Operatoru projekcije na stanje // *Projector onto the state*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - \mathrm{i}\,|1\rangle\,\big)$$

odgovara matrica // has the matrix representation

(a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$. **točno**

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

(d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

(e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

8 Ako je hamiltonijan kvantnog bita // *If the Hamiltonian of a qubit is*

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\,|0\rangle\,\langle 0| - \frac{\hbar\omega}{2}\,|1\rangle\,\langle 1|\,,$$

te ako je početno stanje kvantnog bita // *and if the initial state of the qubit is*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,|0\rangle + |1\rangle),$$

taj će se kvantni naći u stanju // *that qubit will find itself in the state*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(|0\rangle + 2\,|1\rangle)$$

nakon vremena // *after the time*

(a) $\frac{\pi}{2\omega}$

(b) $\frac{\pi}{\omega}$

(c) $\frac{3\pi}{2\omega}$

(d) $\frac{2\pi}{\omega}$

(e) — to se neće dogotiti. // — *that will not happen.* **točno**

9 Sustav dvaju kvantnih bitova ostvaren je projekcijama spinova dviju čestica spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z-os. Matrični prikaz hermitskog operatora koji opisuje zbroj projekcija na z-os je // *The system of two qubits is realized by z-projections of the spins of two $s = 1/2$ particles. Matrix representation of the Hermitean operator describing the sum of the projections is*

$$\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Radi se o operatoru: // *This is the operator:*

(a) $\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I$

(b) $I \otimes \frac{\hbar}{2}\sigma_z$

(c) $\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I + I \otimes \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ **točno**

(d) $\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes \frac{\hbar}{2}\sigma_z$

(e) $\sigma_x \otimes \sigma_y$

10 Operator (gustoće) stanja kvantnog bita je // *State (density) operator of a qubit is*

$$\rho = \frac{1}{3}\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| + \frac{2}{3}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|.$$

Očekivana vrijednost operatora σ_z za taj kvantni bit je // *The expectation of the operator σ_z for this qubit is*

(a) $-2/3$

(b) $-1/3$ **točno**

(c) 0

(d) $1/3$

(e) $2/3$