Algoritmi

Kvantna računala (SI)

17. siječnja 2019.

Načelo kvantnog paralelizma

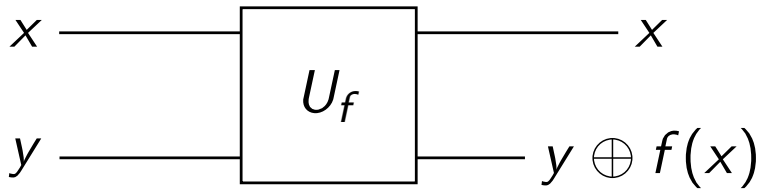
- Ako je početno stanje kvantnog računala superpozicija stanja računalne baze, onda je konačno stanje računala superpozicija odgovarajućih konačnih stanja.
- To znači da jedno jedino konačno stanje kvantnog računala može sadržavati informaciju o rezultatu koji bismo dobili za niz različitih početnih stanja.
- Mogućnost nekih kvantnih logičkih krugova (algoritama) da u jednom koraku obave račun nad više različitih vrijednosti svog argumenta zovemo *kvantnim paralelizmom*.

Funkcija jednog qubita

U klasičnom računalu, funkciju $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ možemo implementirati kao unitarnu transformaciju U_f:

$$(x, y) \xrightarrow{U_f} (x, y \oplus f(x))$$

Prikazano simbolom:



Gornji bit zovemo ulaznim, a donji bit izlaznim bitom.

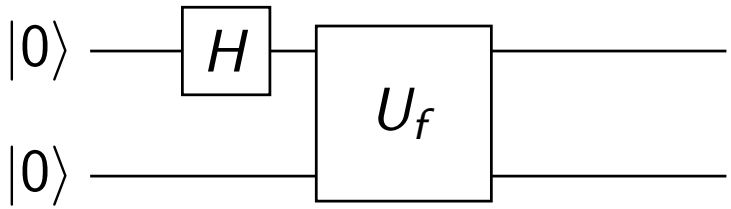
Reverzibilnost vrata odnosno unitarnost operatora slijedi iz svojstva $U_f^2 = I$:

$$(x, y) \xrightarrow{U_f^2} (x, (y \oplus f(x)) \oplus f(x)) = (x, y)$$

Kvantna vrata koja predstavljaju implementaciju funkcije $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$, tzv. *quantum oracle*, imaju svojstvo

$$U_f \left|x \otimes y\right\rangle = \left|x \otimes (y \oplus f(x))\right\rangle, \qquad (x, y \in \{0,1\}).$$

Primjer: Na izlasku iz kvantnog kruga



stanje sustava je

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0 \otimes f(0)\right\rangle + \left|1 \otimes f(1)\right\rangle \right).$$

Uočavamo da konačno stanje ovisi o (sadrži informaciju o) vrijednostima funkcije u dvama različitim vrijednostima argumenta.

Poopćenje na n-ulaznih i m-izlaznih qubitova

- Ulazni registar koji sadrži argument funkcije $f(x)$ sastoji se od n-qubitova čija stanja prikazujemo bazom

$$\{|x\rangle ; x = 0, \ldots, 2^n - 1\},$$

gdje je $|x\rangle = |x_{n-1} \cdots x_1 x_0\rangle$, a $x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ poprimaju vrijednosti 0 ili 1.

- Izlazni registar se sastoji od m-qubitova koliko je potrebno da se prikaže funkcijsku vrijednost. Koristimo bazu

$$\{|z\rangle ; z = 0, \ldots, 2^m - 1\},$$

gdje je $|z\rangle = |z_{m-1} \cdots z_1 z_0\rangle$, ...

- Hadamardov operator proširujemo na tenzorski produkt Hadamardovih operatora. Kad je riječ o ulaznom registru imamo

$$H^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle .$$

- Vrata U_f koja predstavljaju implementaciju funkcije $f(x)$ definiramo kao

$$U_f |x \otimes z\rangle = |x \otimes (z \oplus f(x))\rangle ,$$

gdje je $\oplus$ operacija zbrajanja mod-2 bez prijenosa (*bitwise*).

- Unitarnost U_f slijedi iz svojstva $U_f^2 = I$.

- Pokazuje se da vrijedi $U_f \left|x \otimes 0^{\otimes m}\right\rangle = \left|x \otimes f(x)\right\rangle$.
- Ulazni registar pripremamo u stanju $\left|0^{\otimes n}\right\rangle$ te ga propuštamo kroz Hadamardova vrata. Izlazni registar pripremamo u stanju $\left|0^{\otimes m}\right\rangle$. Na izlazu iz vrata U_f imamo stanje

$$U_f \left(\left(H^{\otimes n} \left|0^{\otimes n}\right\rangle\right) \otimes \left|0^{\otimes m}\right\rangle\right) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} U_f \left|x \otimes 0^{\otimes m}\right\rangle$$
$$= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} \left|x \otimes f(x)\right\rangle$$

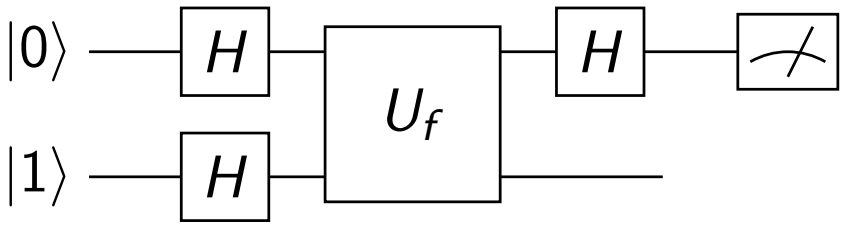
koje u sebi sadrži informaciju o vrijednostima koje funkcija f poprima u svih 2^n različitih vrijednosti njenog argumenta.

Osnovni oblik Deutschevog algoritma

Cilj je odrediti je li funkcija $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ "uravnotežena", $f(1) \neq f(0)$, ili je "konstantna", $f(1) = f(0)$.

Koristeći kvantni paralelizam, Deutschev algoritam rješava postavljeni problem uz samo jednu evaluaciju vrata U_f tj. bez zasebnog izračuna i usporedbe vrijednosti $f(0)$ i $f(1)$.

Kvantni logički krug Deutschevog algoritma je



gdje vrata U_f predstavljaju kvantnu implementaciju funkcije f.

Ulazni i izlazni registar pripremamo u stanjima $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

Pokazuje se da konačno stanje ulaznog registra (gornjeg qubita) možemo izraziti kao

$$\frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} |0\rangle + \frac{(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}}{2} |1\rangle .$$

Uočavamo da uz konstantnu f dobivamo konačno stanje $|0\rangle$, dok za uravnoteženu f dobivamo stanje $|1\rangle$.

To znači da mjerenjem stanja ulaznog registra (gornjeg qubita) možemo odrediti je li funkcija f konstantna ili je uravnotežena.

Analiza toka Deutschevog algoritma:

- Početna stanja qubitova su $|0\rangle$ i $|1\rangle$ što znači da je sustav u stanju
$$|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle .$$
- Nakon prolaska parom Hadamardovih vrata sustav je u stanju
$$H|0\rangle \otimes H|1\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle = |+-\rangle .$$
- Kratkim računom možemo pokazati da za $x \in \{0, 1\}$ vrijedi
$$U_f |x-\rangle = (-1)^{f(x)} |x-\rangle .$$

- Koristeći prethodni rezultat nalazimo stanje sustava po izlasku iz U_f

$$U_f \left|+-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((-1)^{f(0)} \left|0\right\rangle + (-1)^{f(1)} \left|1\right\rangle \right) \otimes \left|-\right\rangle ,$$

što znači da se radi o separabilnom stanju s ulaznim registrom u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left((-1)^{f(0)} \left|0\right\rangle + (-1)^{f(1)} \left|1\right\rangle \right) .$$

- Primjenom Hadamardovog operatora na stanje ulaznog registra po izlasku iz vrata U_f dobivamo konačno stanje

$$\frac{(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}}{2} |0\rangle + \frac{(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}}{2} |1\rangle .$$

Za konstantnu funkciju f konačno stanje prvog qubita $|0\rangle$, dok za balansiranu funkciju f dobivamo stanje $|1\rangle$.

To znači da mjerenjem konačnog stanja prvog qubita određujemo je li f konstantna ili balansirana uz samo jednu evaluaciju kvantne implementacije funkcije f.

Pretraga nestrukturirane baze

Razmatra se problem pretrage nestrukturirane baze podataka.

Neka je $f : \{0, \ldots, 2^n - 1\} \to \{0, 1\}$ takva da

$$f(x) = \delta_{xw} = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x \neq w \\ 1 & \text{za} \quad x = w \end{cases}$$

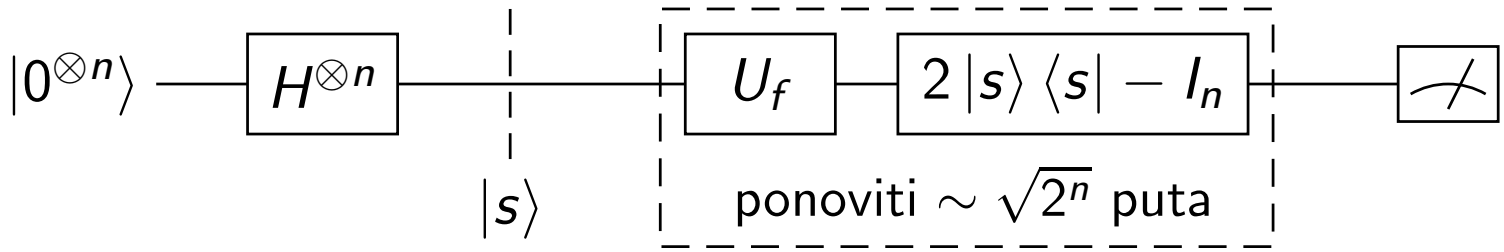
pri čemu je w ("winner") nepoznati broj koji želimo odrediti.

U potrazi za w (pretraga baze) klasični algoritam mora izvrijedniti f u prosijeku $2^n/2$ puta.

Kvantna implementacija funkcije f (quantum oracle) ostvaruje se n-qubitnim unitarnim operatorom U_f sa svojstvom

$$U_f \left|x\right\rangle = (-1)^{f(x)} \left|x\right\rangle, \qquad x = 0, \ldots, 2^n - 1.$$

Logički krug Groverovog algoritma:



Uokvireni operator zovemo Groverovim operatorom. Njegovo djelovanje ponavljamo približno $\sqrt{2^n}$ puta.

Izlazno stanje sustava se u velikoj mjeri podudara s traženim stanjem $\left|w\right\rangle$.

Analiza toka Groverovog algoritma:

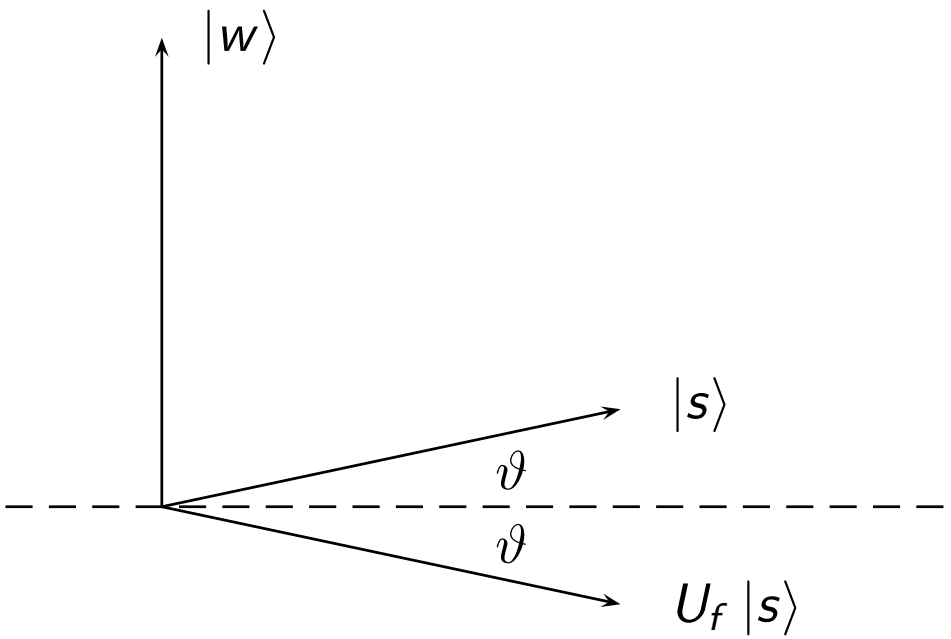
- Svaki od n-qubitova početno u stanju $|0\rangle$ propušta se kroz Hadamardov operator. Time se sustav dovodi u stanje superpozicije svih stanja računalne baze s međusobno jednakim koeficijentima,

$$|s\rangle = H^{\otimes n} |0^{\otimes n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle .$$

Za velik n stanje $|s\rangle$ je "gotovo okomito" na traženo stanje $|w\rangle$. Možemo reći da $|s\rangle$ s okomicom na $|w\rangle$ "zatvara kut ϑ" za koji vrijedi

$$\langle w|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} = \sin\vartheta \simeq \vartheta.$$

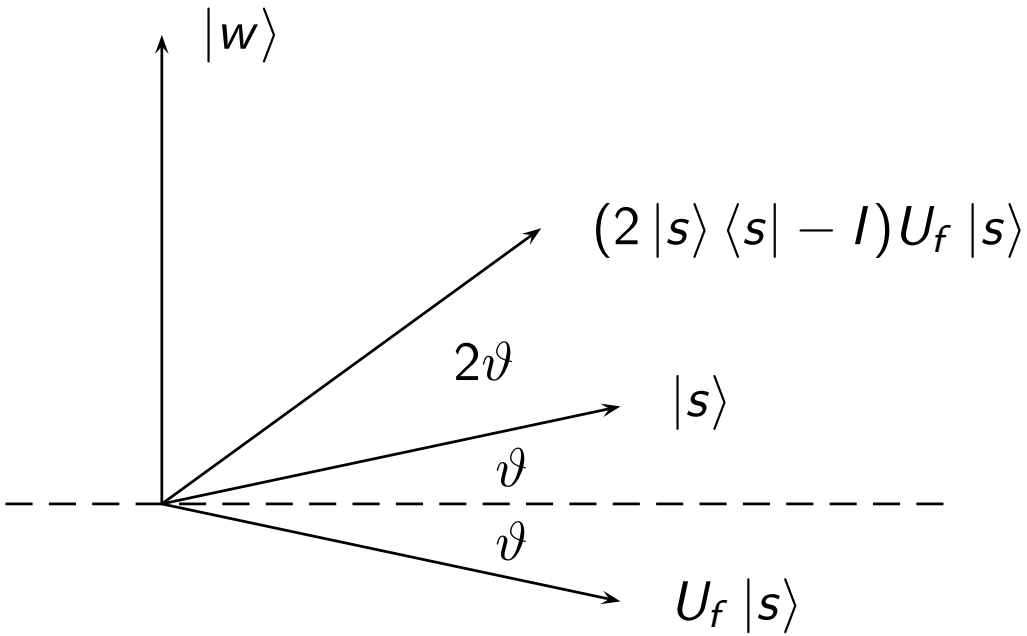
- Učinak operatora U_f na općenit vektor stanja sastoji se u promjeni predznaka koeficijenta uz bazni vektor $|w\rangle$. Promatramo li stanje kao vektor u ravnini koju razapinju $|w\rangle$ i $|s\rangle$, djelovanje U_f možemo shvatiti kao refleksiju stanja u osi koja je okomita na $|w\rangle$. Slika prikazuje refleksiju stanja $|s\rangle$:



- Učinak operatora

$$2\left|s\right\rangle\left\langle s\right| - I$$

možemo shvatiti kao refleksiju stanja u osi koja je je određena vektorom $\left|s\right\rangle$. Slika prikazuje refleksiju stanja $U_f\left|s\right\rangle$:



- S obzirom da je kompozicija dvaju refleksija u osima koje zatvaraju kut α istovjetna rotaciji za kut 2α, djelovanje Groverovog operatora

$$G = (2\left|s\right\rangle\left\langle s\right| - I)U_f$$

možemo shvatiti kao rotaciju stanja u ravnini razapetoj s $\left|w\right\rangle$ i $\left|s\right\rangle$ za kut

$$2\vartheta \simeq \frac{2}{\sqrt{2^n}}.$$

- Početno stanje sustava $\left|s\right\rangle$ zakrenuto je u odnosu na os koja je okomita na $\left|w\right\rangle$ za kut ϑ, a nakon k primjena Groverovog operatora, ono je zakrenuto za kut

$$(2k+1)\vartheta \simeq \frac{2k+1}{\sqrt{2^n}}$$

- Groverov operator primijenit ćemo onoliko puta koliko je potrebno da bi se početno stanje sustava $|s\rangle$ zakrenulo što je moguće bliže traženom stanju $|w\rangle$. Iz uvjeta

$$(2k+1)\vartheta \simeq \pi/2,$$

uz $2^n \gg 1$, slijedi

$$k \simeq \sqrt{2^n}$$

Pokazali smo da Groverov algoritam omogućuje nalaženje tražene vrijednosti uz $\sqrt{2^n}$ evaluacija funkcije f, dok je klasičnim algoritmom za to potrebno $2^n/2$ evaluacija. S obzirom da je omjer tih brojeva razmjeran n-toj potenciji, Groverov algoritam predstavlja eksponencijalno ubrzanje u odnosu na klasični algoritam.