Prva domaća zadaća iz Kvantnih računala (10. studenog 2017. v.2)

Ime, prezime i JMBAG:

Rok za predaju zadaće: na predavanju 17. studenog.

Uputa: Gledate li u elektronički dokument, otisnite ga. Odgovore označite (zaokružite) *na ovom papiru*, a u praznom prostoru pored ponuđenih odgovora ili na dodatnim praznim papirima, za svaki zadatak napišite *kratko obrazloženje ili računski postupak*. Točno riješeni zadaci donose po jedan bod (nema "negativnih bodova").

Notacija i terminologija: Vektori $|0\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $|1\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ čine ortonormiranu bazu u $\mathcal{H}^{(2)}$. Pri realizaciji qubita stanjima polarizacije fotona, vektori $|0\rangle = |x\rangle$ i $|1\rangle = |y\rangle$ odgovaraju stanjima linearne polarizacije u x-smjeru i u y-smjeru, bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ obilježavamo simbolom $\bigoplus$, a bazu $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm |y\rangle)\}$ obilježavamo simbolom $\bigotimes$. Pri realizaciji qubita projekcijom spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z-os uzimamo da $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovarju projekcijama $\hbar/2$ i $-\hbar/2$. Računalnu bazu u prostoru stanja dvaju qubitova obilježavamo s $\{|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle\,; i,j = 0,1\}$. Pojam *entanglement* prevodimo sa *spregnutost*.

Zadaci:

1 Koja dva od pet navedenih vektora *nisu* jedinični vektori?

(a) $\frac{4}{5}|0\rangle + \frac{3}{5}\mathrm{i}\,|1\rangle$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}\big(\,|0\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{i}\,|1\rangle\,\big)$ **točno**

(c) $\frac{1}{3}|0\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3}|1\rangle$

(d) $\frac{1}{\sqrt{5}}\big(2\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)$

(e) $\frac{\sqrt{3}}{2}\big(\,|0\rangle - \frac{1}{2}\mathrm{i}\,|1\rangle\,\big)$ **točno**

2 Qubit se nalazi u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{i}\,|1\rangle\,\big).$$

Vjerojatnost da taj qubit bude izmjeren u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)$$

iznosi

(a) 0

(b) $1/4$

(c) $1/2$ **točno**

(d) $1/\sqrt{2}$

(e) 1

3 Neka se qubit nalazi u stanju $|\Phi\rangle = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}\,|0\rangle - \mathrm{i}\,|1\rangle)$. U kojem od pet navedenih stanja je vjerojatnost nalaženja tog qubita najveća?

(a) $\frac{1}{13}(12\mathrm{i}\,|0\rangle + 5\,|1\rangle)$ **točno**

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\,|0\rangle - |1\rangle)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{i}\,|0\rangle - \sqrt{2}\,|1\rangle)$

(d) $\frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}\,|0\rangle + 2\,|1\rangle)$

(e) $\frac{1}{3}(\sqrt{5}\,|0\rangle - 2\mathrm{i}\,|1\rangle)$

4 Matrični prikaz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

odgovara operatoru:

(a) $|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

(b) $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

(c) $|0\rangle\langle 0|$

(d) $|1\rangle\langle 0|$ **točno**

(e) $|0\rangle\langle 1|$

5 Očekivana vrijednost operatora prikazanog Paulijevom matricom σ_1 u sustavu koji se nalazi u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)$$

je:

(a) 1 **točno**

(b) $1/\sqrt{2}$

(c) 0

(d) $-1/\sqrt{2}$

(e) -1

6 Tablica prikazuje uspostavljanje tajnog ključa protokolom BB84. Ispunite dva retka pri dnu tablice vrijednostima ključeva koji sastavljaju Alice i Bob nakon javne razmjene svojih odabira baza.

Alice:	0	1	0	1	1	1	0	0	1	...
	⊗	⊗	⊕	⊕	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	...
	⦸	⊘	⦶	⊖	⊖	⊘	⦸	⦶	⊖	...
Eve:	⊕	⊗	⊗	⊕	⊗	⊕	⊕	⊕	⊗	...
	0	1	1	1	0	0	1	0	1	...
	⦶	⊘	⊘	⊖	⦸	⦶	⊖	⦶	⊘	...
Bob:	⊕	⊕	⊕	⊕	⊗	⊗	⊕	⊕	⊕	...
	0	0	1	1	0	1	1	0	1	...
Ključ A:	-	-	0	1	-	1	-	0	1	...
B:	-	-	1	1	-	1	-	0	1	...

7 Hamiltonijan nekog qubita dan je s $H = \hbar\omega\,|0\rangle\langle 0|$, gdje je $\omega > 0$ konstanta. Ako je početno stanje sustava

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big),$$

on će se nakon vremena π/ω naći u stanju

(a) $|0\rangle$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + \mathrm{i}\,|1\rangle\,\big)$

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$ **točno**

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - \mathrm{i}\,|1\rangle\,\big)$

(e) $|1\rangle$

8 U kojima od navedenih pet stanja sustava dvaju qubitova su stanja qubitova spregnuta?

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + \mathrm{i}\,|11\rangle)$ **točno**

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + \mathrm{i}\,|10\rangle)$ **točno**

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ **točno**

(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ **točno**

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$

9 Ako je sustav dvaju qubitova u stanju

$$|\Phi\rangle = A(2\mathrm{i}\,|00\rangle + \sqrt{2}\,|01\rangle + \alpha\,|10\rangle + \mathrm{i}\,|11\rangle),$$

gdje je A normalizacijska konstanta te za koje znamo da je separabilno, vrijedi

(a) $|A| = \frac{1}{3}$, $\alpha = -\sqrt{2}$ **točno**

(b) $|A| = \frac{1}{3}$, $\alpha = \sqrt{2}$

(c) $|A| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = -\sqrt{2}$

(d) $|A| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \sqrt{2}$

(e) $|A| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \mathrm{i}\sqrt{2}$

10 Matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

odgovara tenzorskom produktu

(a) $\sigma_1 \otimes \sigma_1$

(b) $\sigma_1 \otimes \sigma_2$

(c) $\sigma_2 \otimes \sigma_2$

(d) $\sigma_2 \otimes \sigma_3$ **točno**

(e) $\sigma_3 \otimes \sigma_3$