

Principi kvantne mehanike

Kvantna računala (SI)

2. studenog 2017.

Principi kvantne mehanike

Princip 1: stanje sustava

Stanje u kojem se nalazi neki sustav prikazujemo normiranim vektorom $|\Phi\rangle$ u N -dimenzionalnom *Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}^{(N)}$. Vektor $|\Phi\rangle$ zovemo *vektorom stanja*.

Normiranost vektora stanja $|\Phi\rangle$ podrazumijeva $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$.

Dimenzija N Hilbertovog prostora ovisi o složenosti sustava koji opisujemo.

Primjer: Pri opisu kvantnog računala koristimo Hilbertov prostor konačne dimenzije N . Za prikaz stanja jednog qubita koristimo $N = 2$. Za prikaz stanja n -qubitnog računala koristimo $N = 2^n$.

Mjerenje (Ψ -provjera)

Izmjeriti neki sustav u stanju $|\Psi\rangle$ znači podvrgnuti sustav postupku koji ga dovodi u to stanje te ga u tom stanju (pozitivno) detektirati. Ovisno o tome je li kvantni sustav detektiran u stanju $|\Psi\rangle$ ili nije, kažemo da on jest ili da on nije “poršao Ψ -provjeru”.

Princip 2: vjerojatnost i amplituda vjerojatnosti

Vjerojatnost da sustav koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$ bude izmjeren u stanju $|\Psi\rangle$ odnosno da prođe Ψ -provjeru je

$$p(\Phi \rightarrow \Psi) = |a(\Phi \rightarrow \Psi)|^2 = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2,$$

gdje je

$$a(\Phi \rightarrow \Psi) = \langle \Psi | \Phi \rangle$$

amplituda vjerojatnosti prelaska sustava iz stanja Φ u stanje Ψ .

Operator projekcije i Hermitski operatori

Projekcija stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$

Umnožak amplitude vjerojatnosti $a(\Phi \rightarrow \Psi) = \langle \Psi | \Phi \rangle$ prelaska sustava iz početnog stanja $|\Phi\rangle$ u konačno stanje $|\Psi\rangle$ i vektora konačnog stanja $|\Psi\rangle$,

$$|\Psi\rangle \langle \Psi | \Phi \rangle ,$$

shvaćamo kao projekciju stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$.

Projekcija stanja na neko drugo stanje jest vektor Hilbertovog prostora, ali taj vektor općenito nije normiran te sam po sebi ne predstavlja stanje sustava.

Operator projekcije (projektor)

Projekciju stanja $|\Phi\rangle$ na stanje $|\Psi\rangle$ možemo izraziti kao rezultat djelovanja *operatora projekcije* (projektora)

$$\mathcal{P}_\Psi = |\Psi\rangle \langle\Psi|$$

na vektor $|\Phi\rangle$,

$$|\mathcal{P}_\Psi\Phi\rangle = \mathcal{P}_\Psi |\Phi\rangle = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle.$$

Primjer: Neka je stanje polarizacije fotona prikazano koristeći ortonormiranu bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ vektorom stanja $|\Phi\rangle = \mu|x\rangle + \lambda|y\rangle$. Projekcija vektora stanja $|\Phi\rangle$ na bazno stanje $|x\rangle$:

$$|\mathcal{P}_x\Phi\rangle = \mathcal{P}_x |\Phi\rangle = |x\rangle \langle x| (\mu|x\rangle + \lambda|y\rangle) = \mu|x\rangle$$

Relacija potpunosti

Neka je $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ bilo koja ortonorminana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$. Tada zbroj projektor na vektore baze daje jedinični operator,

$$\sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n| = I.$$

Gornju relaciju zovemo relacijom potpunosti.

Relacijom potpunosti nalazimo koeficijente μ_n u prikazu općenitog stanja $|\Phi\rangle$ s pomoću vektora baze $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$,

$$|\Phi\rangle = I |\Phi\rangle = \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^N \mu_n |n\rangle, \quad \mu_n = \langle n|\Phi\rangle.$$

Komutator operatora

Komutator operatora A i B jest operator definiran izrazom

$$[A, B] = AB - BA.$$

Ako je komutator dvaju operatora jednak nuli, kažemo da ti operatori *komutiraju*, a u protivnom kažemo da *ne komutiraju*.

Primjer: Projektori na vektore ortonormirane baze međusobno komutiraju.

Primjer: Ako $\langle x|y \rangle = 0$, projektori na stanja

$$|\theta\rangle = \cos \theta |x\rangle + \sin \theta |y\rangle \quad \text{ i } \quad |\alpha\rangle = \cos \alpha |x\rangle + \sin \alpha |y\rangle$$

komutiraju samo za $\theta - \alpha = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kompatibilne i nekompatibilne provjere

Neka su $\mathcal{P}_\Phi$ i $\mathcal{P}_\Psi$ projektori na stanja Φ i Ψ . Ako ti operatori komutiraju, tj. ako

$$[\mathcal{P}_\Phi, \mathcal{P}_\Psi] = 0,$$

moguće je istovremeno provesti Φ -provjeru i Ψ -provjeru općenitog stanja sustava te kažemo da su te provjere *kompatibilne*. U suprotnom, odgovarajuće provjere nije moguće provesti istovremeno te kažemo su one *nekompatibilne*.

Primjer: Provjere povezane sa stanjima koja odgovaraju vektorima odabrane ortonormirane baze međusobno su kompatibilne.

Maksimalno nekompatibilne provjere i komplementarne baze

Neka su $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ i $\{|\alpha\rangle; \alpha = 1, \dots, N\}$ dvije različite ortonormirane baze istog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(N)}$. Ako vrijedi

$$|\langle\alpha|n\rangle|^2 = \frac{1}{N},$$

kažemo da su baze komplementarne, a za provjere koje pripadaju vektorima stanja koji pripadaju različitim bazama kažemo da su maksimalno nekompatibilne.

Primjer: Pri opisu polarizacije fotona, baza $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ i baza $\{|\theta\rangle, |\theta + \pi/2\rangle\}$ su komplementarne baze kad je $\theta = \pi/4$.

Neka je $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$ odabrana tako da stanjima $|n\rangle$ odgovaraju vrijednosti a_n neke fizikalne veličine.

Kad bismo mnogo puta mjerili vrijednost te fizikalne veličine u sustavu koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$, srednja vrijednost mjerenja bila bi

$$\sum_n a_n p(\Phi \rightarrow n) = \sum_n a_n |\langle n|\Phi\rangle|^2 = \sum_n a_n \langle\Phi|n\rangle \langle n|\Phi\rangle,$$

što još možemo izraziti kao

$$\langle\Phi|M\Phi\rangle, \quad \text{gdje je} \quad M = \sum_n a_n |n\rangle \langle n|$$

operator kojim opisujemo samu fizikalnu veličinu.

Hermitski operator

Ukoliko u $\mathcal{H}^{(N)}$ postoji ortonormirana baza $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ takva da operator M možemo izraziti kao linearnu kombinaciju projektora $\mathcal{P}_n = |n\rangle \langle n|$ uz realne koeficijente a_n ,

$$M = \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{P}_n = \sum_{n=1}^N a_n |n\rangle \langle n|, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

onda operator M zovemo hermitskim operatorom. Vektori $|n\rangle$ su svojstveni vektori operatora M , a realni koeficijenti a_n su odgovarajuće svojstvene vrijednosti.

Operator čije su svojstvene vrijednosti realne je hermitski operator.

Očekivana vrijednost hermitskog operatora

Neka se sustav nalazi u stanju $|\Phi\rangle$, a M neka je hermitski operator. Veličinu

$$\langle M \rangle_{\Phi} = \langle \Phi | M \Phi \rangle \in \mathbb{R}$$

zovemo očekivanom vrijednošću operatora M u stanju $|\Phi\rangle$.

Primjer: Ako $M = \sum_n a_n |n\rangle \langle n|$ hermitski operator koji opisuje neku fizikalnu veličinu i ako se sustav nalazi u stanju $|\Phi\rangle = \sum_n \mu_n |n\rangle$, očekivana vrijednost fizikalne veličine je

$$\langle M \rangle_{\Phi} = \langle \Phi | M \Phi \rangle = \dots = \sum_n a_n |\mu_n|^2.$$

Primjer: Polarizaciju fotona možemo opisati fizikalnom veličinom definiranom tako da stanju linearne polarizacije fotona u smjeru x -osi (vektor stanja $|x\rangle$) pridružimo vrijednost $+1$, a stanju linearne polarizacije u smeru y -osi (vektor stanja $|y\rangle$) pridružimo vrijednost -1 . Hermitski operator kojim opisujemo tu fizikalnu veličinu je

$$M = (+1) |x\rangle \langle x| + (-1) |y\rangle \langle y|.$$

Ako je foton u stanju kružne polarizacije

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle),$$

očekivana vrijednost hermitskog operatora M je

$$\langle M \rangle_R = \langle R | M R \rangle = \dots = 0.$$

Evolucija stanja u vremenu (Schrödingerova jednačina)

Princip kvantne mehanike 3: evolucija stanja u vremenu

Evolucija stanja kvantnog sustava u vremenu,

$$|\Phi[t_1]\rangle \rightarrow |\Phi[t_2]\rangle ,$$

jest *linearna* transformacija početnog stanja sustava koja tijekom vremena *ne mijenja normu vektora stanja*.

Linearnost transformacije podrazumijeva da ju možemo izraziti s

$$|\Phi[t_2]\rangle = U[t_2, t_1] |\Phi[t_1]\rangle ,$$

gdje je $U[t_2, t_1]$ *operator evolucije* koji, zbog zahtjeva za očuvanjem norme vektora, ima tzv. *svojstvo unitarnosti*.

Neka svojstva unitarnog operatora vremenske evolucije $U[t_2, t_1]$:

- Unitarnost: ako $|\Phi'\rangle = U|\Phi\rangle$, onda $\langle\Phi'|\Phi'\rangle = \langle\Phi|\Phi\rangle$
- Ako $|\Phi'\rangle = U|\Phi\rangle$ i $|\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle$, onda $\langle\Psi'|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle$
- Invertibilnost: postoji “inverz” U^{-1} takav da $U^{-1}U = I$
- Kompozicija operatora: $U[t_2, t_1] = U[t_2, t']U[t', t_1]$
- Također vrijede relacije:

$$U^{-1}[t_2, t_1] = U[t_1, t_2], \quad U[t, t] = I, \quad \dots$$

Schrödingerova jednačba (bez izvoda)

Iz zahtjeva za unitarnošću operatora vremenske evolucije U slijedi da taj operator zadovoljava (diferencijalnu) jednačbu gibanja

$$i\hbar \frac{d}{dt} U[t, t_0] = \hat{H}[t] U[t, t_0],$$

gdje hermitski operator $\hat{H}$ opisuje energiju sustava. Gornju jednačbu zovemo *Schrödingerovom* jednačbom, a operator $\hat{H}$ zovemo Hamiltonovim operatorom ili hamiltonijanom.
($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s je Planckova konstanta.)

Schrödingerovu jednačbu se također može napisati kao

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Phi[t]\rangle = \hat{H}[t] |\Phi[t]\rangle .$$

Primjer: Neka stanjima qubita $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju energije $\hbar\omega_0$ i $\hbar\omega_1$, pri čemu je $\omega_0 \geq \omega_1$.

Hamiltonijan (operator energije) možemo izraziti kao

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 |0\rangle \langle 0| + \hbar\omega_1 |1\rangle \langle 1|$$

te stanje qubita i početne uvjete u $t = 0$ kao

$$|\Phi[t]\rangle = \mu[t] |0\rangle + \lambda[t] |1\rangle, \quad \mu[0] = \mu_0, \quad \lambda[0] = \lambda_0.$$

Uvrštavanjem $\hat{H}$ i $|\Phi[t]\rangle$ u Schrödingerovu jednačbu dobivamo

$$i\hbar \left(\frac{d}{dt} \mu[t] |0\rangle + \frac{d}{dt} \lambda[t] |1\rangle \right) = \hbar\omega_0 \mu[t] |0\rangle + \hbar\omega_1 \lambda[t] |1\rangle.$$

Slijedi

$$\frac{d\mu}{\mu} = -i\omega_0 dt, \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = -i\omega_1 dt,$$

te integracijom dobivamo

$$\mu[t] = \mu_0 e^{-i\omega_0 t}, \quad \lambda[t] = \lambda_0 e^{-i\omega_1 t}.$$

Stanje qubita sada možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} |\Phi[t]\rangle &= \mu_0 e^{-i\omega_0 t} |0\rangle + \lambda_0 e^{-i\omega_1 t} |1\rangle \\ &= e^{-i\bar{\omega}t} \left(\mu_0 e^{-i\delta t/2} |0\rangle + \lambda_0 e^{+i\delta t/2} |1\rangle \right) \end{aligned}$$

gdje je

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}, \quad \delta = \omega_0 - \omega_1.$$

Vektori, dualni vektori i skalarni produkt ($N = 2$)

Vektore ortonormirane baze $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ u $\mathcal{H}^{(2)}$ prikazujemo vektor-stupcima

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Općeniti vektor je tada

$$|\Phi\rangle = \lambda |0\rangle + \mu |1\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

a odgovarajući dualni vektor (bra-simbol) prikazuje se vektor-retkom

$$\langle\Phi| = \lambda^* \langle 0| + \mu^* \langle 1| = (\lambda^* \quad \mu^*).$$

Skalarni produkt vektora

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

može se izračunati *unutarnjim množenjem* vektor-retka koji prikazuje dualni vektor $\langle\Psi|$ i vektor-stupca koji prikazuje vektor $|\Phi\rangle$

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = (\nu^* \quad \sigma^*) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \nu^* \lambda + \sigma^* \mu.$$

Primjer: Projekcija $|\Phi\rangle$ na $|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle &= \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} \left((\nu^* \quad \sigma^*) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} (\nu^* \lambda + \sigma^* \mu) \\ &= \begin{pmatrix} |\nu|^2 \lambda + \nu \sigma^* \mu \\ \sigma \nu^* \lambda + |\sigma|^2 \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Operator projekcije ($N = 2$)

Neka su

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

vektori. Operator projekcije na stanje prikazano vektorom $|\Psi\rangle$ prikazuje se matricom koju dobivamo tzv. *vanjskim množenjem* vektora-stupca i vektora-retka kojima prikazujemo $|\Psi\rangle$ i $\langle\Psi|$,

$$\mathcal{P}_\Psi = |\Psi\rangle \langle\Psi| = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} \otimes (\nu^* \quad \sigma^*) = \begin{pmatrix} |\nu|^2 & \nu\sigma^* \\ \sigma\nu^* & |\sigma|^2 \end{pmatrix}$$

Projekciju vektora $|\Phi\rangle$ na vektor $|\Psi\rangle$ dobivamo množenjem matrice i vektora:

$$\mathcal{P}_\Psi |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} |\nu|^2 & \nu\sigma^* \\ \sigma\nu^* & |\sigma|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\nu|^2\lambda + \nu\sigma^*\mu \\ \sigma\nu^*\lambda + |\sigma|^2\mu \end{pmatrix}$$

Primjer: Projektori na bazna stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$:

$$\mathcal{P}_0 = |0\rangle \langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_1 = |1\rangle \langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zbroj projektora daje operator identiteta:

$$\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Primjer: Stanje desne kružne polarizacije fotona i projektor na to stanje (koristimo $|x\rangle = |0\rangle$, $|y\rangle = |1\rangle$):

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_R = |R\rangle \langle R| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad -i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Stanje lijeve kružne polarizacije i projektor na to stanje:

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_L = |L\rangle \langle L| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \quad i) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Uočava se $\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = I$.

Hermitski operator i hermitsko konjugiranje

Koristimo li u $\mathcal{H}^{(N)}$ bazu $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$, vektor stanja $|n\rangle$ dogovorno prikazujemo vektor-stupcem koji svuda ima nule osim na n -tom mjestu odozgo gdje ima jedinicu. j -ti element tog vektor-stupca možemo izraziti kao

$$(|n\rangle)_j = \delta_{jn}.$$

Dualni vektor (bra) prikazujemo vektor-retkom $(\langle m|)_i = \delta_{mi}$.

Ako je M općenit operator u $\mathcal{H}^{(N)}$, element u m -tom retku i n -tom stupcu matričnog prikaza tog operatora se može izraziti kao

$$(M)_{mn} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{mi} M_{ij} \delta_{jn} = \langle m| M |n\rangle.$$

Neka je

$$M = \sum_{n=1}^N a_n |n\rangle \langle n|, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

Hermitski operator. U bazi $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ taj je operator prikazan diagonalnom matricom pri čemu se elementi na dijagonali podudaraju sa svojstvenim vrijednostima operatora,

$$(M)_{mn} = \langle m| M |n\rangle = a_m \delta_{mn}.$$

U općenitoj bazi $\{|\alpha\rangle, \alpha = 1, \dots, N\}$ čiji se vektori ne podudaraju sa svojstvenim vektorima hermitskog operatora M , elementi matrice kojom prikazujemo taj operator imaju svojstvo

$$\begin{aligned}(M)_{\alpha\beta} &= \langle\alpha| M |\beta\rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle\alpha|n\rangle \langle n|\beta\rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle\beta|n\rangle^* \langle n|\alpha\rangle^* \\ &= \left(\sum_{n=1}^N a_n \langle\beta|n\rangle \langle n|\alpha\rangle \right)^* = \langle\beta| M |\alpha\rangle^* = ((M)_{\beta\alpha})^*.\end{aligned}$$

To znači da matrica koja prikazuje hermitski operator ostaje nepromijenjena ako ju transponiramo i kompleksno konjugiramo.

Hermitsko konjugiranje matrice

Hermitsko konjugiranje matrice jest transformacija koja se sastoji od kompleksne konjugacije i transpozicije matrice (redosljed operacija kompleksne konjugacije i transpozicije nije od važnosti). Hermitsko konjugiranje matrice M obilježavamo simbolom $\dagger$ (“bodež”),

$$M^\dagger = (M^*)^T = (M^T)^*,$$

dok za komponente matrice vrijedi $(M^\dagger)_{ij} = (M^*)_{ji} = ((M)_{ji})^*$.

Matrični prikaz hermitskog operatora

Matrični prikaz hermitskog operatora M invarijantan je na operaciju hermitskog konjugiranja,

$$M^\dagger = M \quad (\text{hermitski operator}).$$

Prikaz stanja qubita na Blochovoj sferi

Blochova sfera

Potpuno općenito stanje qubita može se izraziti vektorom stanja

$$|\Phi\rangle = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle$$

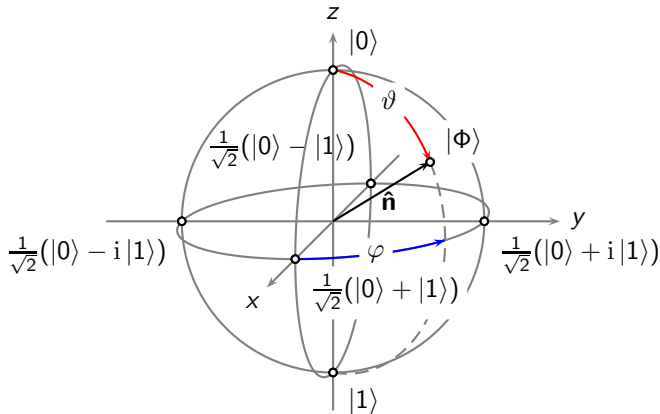
gdje su $|0\rangle$ i $|1\rangle$ vektori ortonormirane baze u $\mathcal{H}^{(2)}$, a parametre

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad \text{ i } \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi$$

možemo shvatiti kao koordinate točke na tzv. *Blochovoj sferi*.

Gornji zapis osigurava normiranost vektora stanja $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ te uzima u obzir činjenicu da $|\Phi\rangle$ i $e^{i\psi} |\Phi\rangle$ predstavljaju isto stanje.

Prikaz stanja $|\Phi\rangle = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle$ na BS:



3D-vektor: $\hat{\mathbf{n}} = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}$

3D-vektor $\hat{\mathbf{n}} = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}$ pokazuje točku na Blochovoj sferi kojoj odgovara vektor stanja

$$|\Phi\rangle = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi/2} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle.$$

3D-vektor $-\mathbf{n}$ koji dobivamo zamjenom $\vartheta \rightarrow \pi - \vartheta$ i $\varphi \rightarrow \varphi \pm \pi$ pokazuje suprotnu točku na BS kojoj odgovara vektor stanja

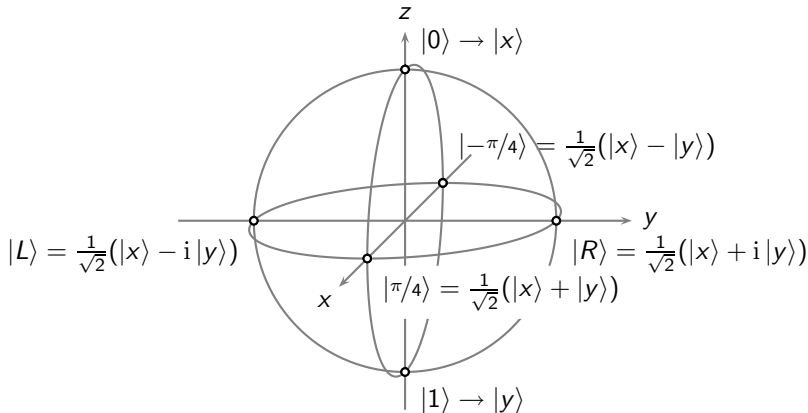
$$\begin{aligned} |\Phi_{\perp}\rangle &= e^{-i(\varphi \pm \pi)/2} \cos \frac{\pi - \vartheta}{2} |0\rangle + e^{i(\varphi \pm \pi)/2} \sin \frac{\pi - \vartheta}{2} |1\rangle \\ &= \mp i \left(e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\vartheta}{2} |0\rangle - e^{i\varphi/2} \cos \frac{\vartheta}{2} |1\rangle \right). \end{aligned}$$

Vektori stanja $|\Phi\rangle$ i $|\Phi_{\perp}\rangle$ zadovoljavaju relacije ortonormiranosti te predstavljaju moguć odabir ortonormirane baze u $\mathcal{H}^{(2)}$.

Stanja qubita prikazana na Blochovoj sferi:

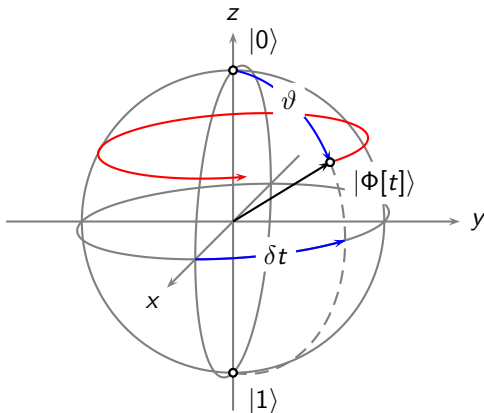
- Bilo koji par suprotnih točaka na Blochovoj sferi predstavlja moguć odabir vektora ortonormirane baze.
- Provjere stanja koja se nalaze na “ekvatoru” Blochove sfere koji je određen odabirom baze (polova) maksimalno su nekompatibilne sa provjerama stanja baze.
- Bilo koji par suprotnih točaka na ekvatoru predstavlja bazu koja je komplementarna s bazom koja određuje ekvator.
- Istovremeno je moguće odabrati tri međusobno komplementarne baze. (To mogu biti, na primjer, parovi točaka u kojima x , y i z -os probadaju Blochovu sferu.)

Primjer: Prikaz stanja polarizacije fotona na BS:



Primjer: Ako stanjima $|0\rangle$ i $|1\rangle$ odgovaraju energije $\hbar\omega_0$ i $\hbar\omega_1$,

$$|\Phi[t]\rangle = e^{-i\delta t/2} \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\delta t/2} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad \delta = \omega_0 - \omega_1.$$



Paulijeve matrice i prikaz hermitskog operatora

Projektori na vektore stanja $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ koji se nalaze u točkama u kojima z-os probada Blochovu sferu su

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Koristeći te projektore sastavljamo hermitski operator

$$\sigma_z = (+1)|0\rangle\langle 0| + (-1)|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svojstveni vektori tog operatora su $|0\rangle$ (točka Blochove sfere u kojoj ju probada pozitivan krak z-osi) sa svojstvenom vrijednošću 1 te $|1\rangle$ (točka BS u kojoj ju probada negativan krak z-osi) sa svojstvenom vrijednošću -1 .

Sličnim postupkom sastavljamo hermitske operatore čija svojstvena stanja odgovaraju parovima točaka na Blochovoj sferi u kojima ju probadaju x odnosno y -os. Matrični prikazi tih operatora su

$$\sigma_x = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \sigma_y = \dots = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Uobičajene su oznake

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = \sigma_y, \quad \sigma_3 = \sigma_z,$$

a može se pokazati da vrijede relacije

$$\sigma_i^2 = I, \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2.$$

Paulijeve ili σ -matrice

Matrice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zovemo *Paulijevim* ili σ -*matricama*. One predstavljaju hermitske operatore u $\mathcal{H}^{(2)}$ čiji se svojstveni vektori podudaraju s vektorima triju međusobno komplementarnih baza u $\mathcal{H}^{(2)}$ i čije su svojstvene vrijednosti ± 1 .

Primjer: Vektori $\pm \hat{\mathbf{n}}$ na Blochovoj sferi pokazuju stanja

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ e^{i\varphi/2} \sin \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |\Phi_{\perp}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -e^{i\varphi/2} \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

koja čine ortonormiranu bazu (raniji primjer). Konstruiramo li operator

$$\sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = (+1)|\Phi\rangle\langle\Phi| + (-1)|\Phi_{\perp}\rangle\langle\Phi_{\perp}| = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\ e^{i\varphi} \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix},$$

u posebnim slučajevima $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dobivamo Paulijeve matrice:

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{i} \quad (\vartheta = \pi/2, \varphi = 0) \quad : \quad \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_1$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{j} \quad (\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2) : \quad \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_2$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k} \quad (\vartheta = 0) \quad : \quad \sigma_{\hat{\mathbf{n}}} = \sigma_3$$

Prikaz hermitskog operatora

Matrični prikaz bilo kojeg hermitskog operatora M u $\mathcal{H}^{(2)}$ možemo izraziti kao

$$M = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \sigma_i,$$

gdje je I jedinična matrica, σ_1 , σ_2 i σ_3 su Paulijeve matrice, a λ_0 , λ_1 , λ_2 i λ_3 su realni koeficijenti.

Primjer: Operator $\sigma_{\hat{n}}$ iz prethodnog primjera možemo izraziti kao

$$\sigma_{\hat{n}} = \sin \vartheta \cos \varphi \sigma_1 + \sin \vartheta \sin \varphi \sigma_2 + \cos \vartheta \sigma_3,$$

gdje su σ_1 , σ_2 i σ_3 Paulijeve matrice, a koeficijenti $\lambda_1 = \sin \vartheta \cos \varphi$ itd. se podudaraju s komponentama vektora $\hat{n}$.

Spin 1/2 kao realizacija qubita

Spin je, uz masu i električni naboj, temeljno svojstvo čestice. Po svom karakteru, spin je vektorska veličina nalik kutnoj količini gibanja.

Spin čestice je, poput električnog naboja, kvantiziran. U prirodi postoje čestice sa spinskim kvantnim brojem

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots,$$

a sama vrijednost spina je $S = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, gdje je $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s Planckova konstanta.

Elektron, proton i neutron imaju spinski kvantni broj $s = 1/2$.

U eksperimentima je moguće mjeriti projekciju spina čestice na odabranu prostornu os (tzv. Stern–Gerlachov eksperiment).

Projekcija spina čestice spinskog kvantnog broja s na odabranu os može poprimiti $2s + 1$ različitih vrijednosti. Odaberemo li z -os, moguće projekcije spina su

$$S_z = -\hbar s, -\hbar(s - 1), \dots, \hbar(s - 1), \hbar s.$$

Kad se radi o čestici spinskog kvantnog broja $s = 1/2$, moguće su samo dvije projekcije spina na z -os,

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2},$$

te kažemo da projekcija spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na z -os predstavlja moguću realizaciju qubita.

Projekciju spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ na x , y i z -os opisujemo hermitskim operatorima

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_1, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3,$$

dok vektor spina takve čestice možemo opisati operatorom

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{gdje je} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}\sigma_1 + \mathbf{j}\sigma_2 + \mathbf{k}\sigma_3.$$

Očekivani vektor spina u sustavu koji se nalazi u stanju $|\Phi\rangle$ je

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \Phi | \mathbf{S} | \Phi \rangle = \dots = \frac{\hbar}{2} \hat{\mathbf{n}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{n}}$ vektor koji na Blochovoj sferi pokazuje stanje $|\Phi\rangle$.

Kvadrat iznosa spina čestice spinskog kvantnog broja $s = 1/2$ možemo opisati hermitskim operatorom

$$\begin{aligned} S^2 &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{\hbar^2}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \\ &= \frac{\hbar^2}{4} (I + I + I) \\ &= \frac{3\hbar^2}{4} I. \end{aligned}$$

Uočavamo da je svako stanje qubita (orijentacija spina) svojstveno stanje operatora S^2 uz svojstvenu vrijednost $3\hbar^2/4$.

Iznos spina čestice čiji je spinski kvantni broj $s = 1/2$ prepoznamo kao $S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$ što je upravo $\hbar\sqrt{s(s+1)}$.