EPR pojava, Bellove nejednakosti i teleportacija

Kvantna računala (SI)

20. siječnja 2017.

Einstein–Podolsky–Rosenov paradoks (Bohmov primjer)

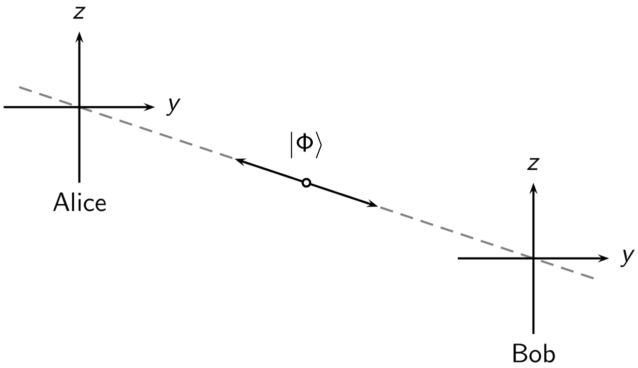
Neka je sustav dviju čestica spina $s = 1/2$ pripremljen u spregnutom stanju

$$|\phi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\,\big),$$

gdje $\uparrow$ i $\downarrow$ označavaju projekciju spina čestice na z-os:

- Ukupni spin sustava čestica jednak je nuli, $S^2\,|\Phi\rangle = 0\,|\Phi\rangle$.
- Zbroj projekcija spinova na bilo koju os jednak je nuli, npr. $(\sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z)\,|\Phi\rangle = 0\,|\Phi\rangle$.
- Očekivana vrijednost projekcije spina pojedine čestice na bilo koju os jednaka je nuli.

Neka se čestice u stanju $|\Phi\rangle$ gibaju duž x-osi u suprotnim smjerovima. Prva (druga) čestica se giba prema laboratoriju u kojem se nalazi Alice (Bob).



Alice i Bob neovisno jedno o drugome odabiru orijentaciju osi te mjere projekciju spina u odnosu na os koju odaberu.

Slučaj 1: Alice i Bob odabiru istu os, npr. z-os, u odnosu na koju mjere projekciju spinova čestica.

Usporedbom mjerenja provedenih nad nizom parova čestica pripremljenih u stanju $|\Phi\rangle$, Alice i Bob nalaze korelaciju

$$\text{A: } \uparrow \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{B: } \downarrow$$

$$\text{A: } \downarrow \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{B: } \uparrow$$

koja proizlazi iz svojstva

$$(\sigma_z \otimes \sigma_z) |\Phi\rangle = - |\Phi\rangle \,.$$

Uočavamo da na osnovi rezultata koji je dobila Alice, Bob može znati rezultat koji bi on dobio mjerenjem, bez da obavi mjerenje.

Slučaj 2: Alice i Bob odabiru međusobno okomite osi, npr. Alice odabire z-os, a Bob odabire y-os.

- Ako Alice izmjeri $\uparrow$, a Bob izmjeri $\rightarrow$, onda Alice zna da bi mjerenjem projekcije na y-os dobila $\leftarrow$, a Bob zna da bi mjerenjem projekcije na z-os dobio $\downarrow$.
- Lako je konstruirati preostala tri slučaja. . .

Uočavamo da Alice može znati projekciju spina čestice na z-os (na osnovi vlastitog mjerenja) te na y-os (na osnovi mjerenja koje Bob obavlja nad drugom česticom).

Gornja tvrdnja je u neskladu s kvantnom mehanikom prema kojoj, pri opisu samo jedne čestice, nije dopušteno istovremeno poznavanje projekcija spina na dvije međusobno okomite osi.

Moguća rješenja EPR paradoksa:

- Izvorni prijedlog EPR: proširenje kvantne mehanike tzv. skrivenim varijablama (u neskladu s tzv. Bellovim nejednakostima).
- Dopuštanje trenutne komunikacije među česticama (u neskladu s načelima Specijalne teorije relativnosti).
- Sagledavanje sustava isključivo kao cjeline uz korištenje načela spregnutosti.

Bellov teorem (Bohm/Strapp primjer)

Bellov teorem tvrdi da nijedna fizikalna teorija koja uključuje skrivene varijable (varijable koje bi sadržavale informaciju o tome kako se sustav mora ponašati pri mjerenju) ne može opisati sva predviđanja kvantne mehanike.

Bellov teorem se iskazuje tzv. Bellovim nejednakostima koje u različitim situacijama poprimaju različite oblike.

Ovdje ćemo provesti analizu ranijeg primjera (EPR–Bohm).

. . . analiza na ploči . . .

Teleportacija kvantnog stanja

Cilj je prenijeti informaciju o stanju qubita iz točke A (Alice) u točku B (Bob) bez prijenosa samog fizičkog objekta čijim stanjem je qubit realiziran.

Prema teoremu o nemogućnosti kvantnog kloniranja, mjerenjem stanja qubita ne dobivamo potpunu informaciju o stanju koju bismo potom mogli poslati klasičnim kanalom (npr. telefonom).

Unatoč tomu, problem je moguće riješiti postupkom koji se oslanja na načelo spregnutosti stanja qubitova.

Neka se u točki A gdje se nalazi Alice također nalazi qubit u stanju

$$|\phi_A\rangle = \lambda\,|0_A\rangle + \mu\,|1_A\rangle\,.$$

Alice želi stanje $|\phi_A\rangle$ prenijeti u točku B gdje se nalazi Bob.

Pretpostavit ćemo da u blizini možemo stvoriti par čestica B i C u spregnutom stanju

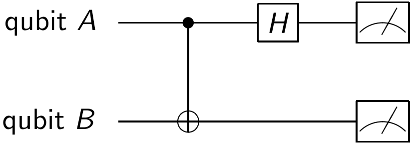
$$|\Psi_{BC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0_B 0_C\rangle + |1_B 1_C\rangle\,\big),$$

tako da čestica B stigne u točku A, a čestica C stigne u točku B.

Stanje svih triju qubitova tada je

$$|\Phi_{ABC}\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\,|0_A\rangle\,\big(\,|0_B 0_C\rangle + |1_B 1_C\rangle\,\big) + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\big(\,|0_B 0_C\rangle + |1_B 1_C\rangle\,\big)$$

Alice provodi sljedeću transformaciju nad qubitovima A i B:



Pokazuje se da na islasku iz cNOT vrata imamo stanje

$$|\Phi'_{ABC}\rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\,|0_A\rangle\left(|0_B0_C\rangle+|1_B1_C\rangle\right)+\frac{\mu}{\sqrt{2}}\,|1_A\rangle\left(|1_B0_C\rangle+|0_B1_C\rangle\right).$$

Nakon prolaska kroz Hadamardova vrata stanje sustava je

$$
\begin{aligned}
|\Phi''_{ABC}\rangle = \frac{1}{2}\,|0_A0_B\rangle\,\big(\lambda\,|0_C\rangle + \mu\,|1_C\rangle\,\big) \\
+ \frac{1}{2}\,|0_A1_B\rangle\,\big(\mu\,|0_C\rangle + \lambda\,|1_C\rangle\,\big) \\
+ \frac{1}{2}\,|1_A0_B\rangle\,\big(\lambda\,|0_C\rangle - \mu\,|1_C\rangle\,\big) \\
+ \frac{1}{2}\,|1_A1_B\rangle\,\big(-\mu\,|0_C\rangle + \lambda\,|1_C\rangle\,\big).
\end{aligned}
$$

Mjerenjem stanja qubitova A i B, Alice iz gornjeg izraza iščitava stanje u kojem se nalazi qubit C.

Npr. ako Alice mjerenjem dobije $|0_A0_B\rangle$, ona prepoznaje da je stanje qubita C istovjetno početnom stanju qubita A. Tu informaciju ona klasičnim kanalom (telefonom) prenosi Bobu.

U ostalim slučajevima, Alice klasičnim kanalom javlja Bobu kakvu transformaciju mora provesti nad stanjem qubita C kako bi ga doveo u stanje koje je istovjetno početnom stanju qubita A.

- Ako mjerenje daje $|0_A 1_B\rangle$, Bob mora provesti rotaciju stanja qubita C oko x-osi za kut π.
- Ako mjerenje daje $|1_A 0_B\rangle$, Bob mora provesti rotaciju stanja qubita C oko z-osi za kut π.
- Ako mjerenje daje $|1_A 1_B\rangle$, Bob mora provesti rotaciju stanja qubita C oko y-osi za kut π.

Nakon provedene rotacije Bob raspolaže s qubitom C čije stanje je istovjetno početnom stanju qubita A.

Samo stanje qubita A je postupkom teleportacije promijenjeno, što je u skladu s teoremom o nemogućnosti kloniranja kvantnog stanja.