

# Spregnuta stanja

Kvantna računala (SI)

17. prosinca 2016.

# Tenzorski produkt stanja, prostora i operatora

Stanje qubita  $A$  prikazujemo vektorom  $|\phi_A\rangle$  u Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}_A$  koristeći ortonormiranu bazu  $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle\}$ .

Stanje qubita  $B$  prikazujemo vektorom  $|\phi_B\rangle$  u  $\mathcal{H}_B \dots$

Ako se qubitovi  $A$  i  $B$  nalaze u stanjima  $|\phi_A\rangle$  i  $|\phi_B\rangle$ , stanje sustava koji se sastoji od tih dvaju qubitova prikazujemo tzv. *tenzorskim produktom vektora stanja*  $|\phi_A\rangle$  i  $|\phi_B\rangle$ , a označavamo ga s

$$|\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle, \quad \text{ili jednostavnije} \quad |\phi_A \otimes \phi_B\rangle.$$

Taj vektor pripada tzv. *tenzorskom produktu Hilbertovih prostora*  $\mathcal{H}_A$  i  $\mathcal{H}_B$  koji je sam po sebi Hilbertov prostor, a označavamo ga s

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

U Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  je prirodno odabrati ortonormiranu bazu  $\{|ij\rangle = |i_A \otimes j_B\rangle; i, j = 0, 1\}$  odnosno

$$\{ \begin{array}{l} |00\rangle = |0_A \otimes 0_B\rangle, \quad |01\rangle = |0_A \otimes 1_B\rangle, \\ |10\rangle = |1_A \otimes 0_B\rangle, \quad |11\rangle = |1_A \otimes 1_B\rangle \end{array} \}.$$

Općenit vektor u  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  tada je

$$|\Psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle,$$

gdje  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ . Ako gornji vektor opisuje stanje kvantnog sustava, normiranost tog vektora podrazumijeva

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.$$

**Primjer.** Ako se qubitovi  $A$  i  $B$  nalaze u stanjima

$$|\phi_A\rangle = \lambda_A |0_A\rangle + \mu_A |1_A\rangle \quad \text{i} \quad |\phi_B\rangle = \lambda_B |0_B\rangle + \mu_B |1_B\rangle,$$

stanje sustava prikazujemo vektorom stanja

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= |\phi_A \otimes \phi_B\rangle = \lambda_A \lambda_B |0_A \otimes 0_B\rangle + \lambda_A \mu_B |0_A \otimes 1_B\rangle \\ &\quad + \mu_A \lambda_B |1_A \otimes 0_B\rangle + \mu_A \mu_B |1_A \otimes 1_B\rangle \\ &= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle, \end{aligned}$$

gdje su  $\alpha = \lambda_A \lambda_B$ ,  $\beta = \lambda_A \mu_B$ ,  $\gamma = \mu_A \lambda_B$  i  $\delta = \mu_A \mu_B$ .

Lako je pokazati da je uvijek normiranosti ispunjen.

Neka operator  $M_A$  djeluje na vektore stanja qubita  $A$  u  $\mathcal{H}_A$ , a  $M_B$  neka djeluje na vektore stanja qubita  $B$  u  $\mathcal{H}_B$ .

Djelovanju tih operatora na vektore stanja u  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  odgovara *tenzorski produkt operatora* koji označavamo s

$$M_A \otimes M_B.$$

Kad se sustav qubitova nalazi u stanju koje možemo izraziti tenzorskim produktom stanja qubitova  $A$  i  $B$ ,

$$|\Phi\rangle = |\phi_A \otimes \phi_B\rangle,$$

djelovanje gornjeg operatora možemo izraziti kao

$$(M_A \otimes M_B) |\Phi\rangle = |M_A \phi_A \otimes M_B \phi_B\rangle.$$

**Primjer.** Neka su qubitovi  $A$  i  $B$  realizirani orijentacijama spinova dviju čestica spinskog kvantnog broja  $s = 1/2$ .

Projekciju spina čestice  $A$  na  $z$ -os u sustavu dviju čestica opisujemo operatorom

$$\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I.$$

Djelovanjem tog operatora na vektore baze u  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  dobivamo:

$$(\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I) |00\rangle = |\frac{\hbar}{2}\sigma_z 0_A \otimes I 0_B\rangle = |\frac{\hbar}{2} 0_A \otimes 0_B\rangle = \frac{\hbar}{2} |00\rangle$$

$$(\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I) |01\rangle = |\frac{\hbar}{2}\sigma_z 0_A \otimes I 1_B\rangle = |\frac{\hbar}{2} 0_A \otimes 1_B\rangle = \frac{\hbar}{2} |01\rangle$$

$$(\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I) |10\rangle = |\frac{\hbar}{2}\sigma_z 1_A \otimes I 0_B\rangle = |-\frac{\hbar}{2} 1_A \otimes 0_B\rangle = -\frac{\hbar}{2} |10\rangle$$

$$(\frac{\hbar}{2}\sigma_z \otimes I) |11\rangle = |\frac{\hbar}{2}\sigma_z 1_A \otimes I 1_B\rangle = |-\frac{\hbar}{2} 1_A \otimes 1_B\rangle = -\frac{\hbar}{2} |11\rangle$$

Vektore ortonormirane baze  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  u  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  prikazujemo vektor–stupcima:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Općenit vektor  $|\Phi\rangle$  i odgovarajući dualni vektor  $\langle\Phi|$  prikazujemo s

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \langle\Phi| = (\alpha^* \quad \beta^* \quad \gamma^* \quad \delta^*).$$

Ako su  $(M_A)_{ij}$  i  $(M_B)_{pq}$  elementi matrice prikaza operatora  $M_A$  i  $M_B$ , matricni elementi operatora  $M_A \otimes M_B$  su

$$(M_A \otimes M_B)_{ip;qq} = (M_A)_{ij}(M_B)_{pq}.$$

Ako su

$$M_A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

onda je

$$M_A \otimes M_B = \begin{pmatrix} aM_B & bM_B \\ cM_B & dM_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{pmatrix}$$



**Primjer.** Tenzorski produkt Paulijeve matrice  $\sigma_z$  sa samom sobom odnosno prikaz operatora  $M_A \otimes M_B = \sigma_z \otimes \sigma_z$ :

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analognim postupkom:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Primjer.** Operator

$$M_{\text{swap}} = \frac{1}{2}(I + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B) = \frac{1}{2}(I + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

ima matrični prikaz

$$M_{\text{swap}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

te svojstvo

$$M_{\text{swap}} |ij\rangle = |ji\rangle$$

zbog taj operator zovemo operatorom SWAP.

**Primjer.** Svojstveni vektori operatora

$$M_{\text{swap}} = \frac{1}{2}(I + \sigma_A \cdot \sigma_B)$$

su vektor

$$|\Phi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

sa svojstvenom vrijednošću  $-1$  te *triplet* vektora

$$|00\rangle, \quad |\Phi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad |11\rangle,$$

sa svojstvenom vrijednošću  $1$ .

**Primjer.** Zbroj projekcija spinova dviju čestica spinskog kvantnog broja  $s = 1/2$  na z-os možemo opisati operatorom

$$S_z = \frac{\hbar}{2}(\sigma_z \otimes I + I \otimes \sigma_z).$$

Svojstveni vektori operatora  $S_z$  su  $|\Phi_-\rangle$  sa svojstvenom vrijednošću 0 te vektori tripleta  $\{|00\rangle, |\Phi_+\rangle, |11\rangle\}$  iz ranijeg primjera sa svojstvenim vrijednostima redom  $+\hbar$ , 0 i  $\hbar$ .

**Primjer.** Svojstveni vektori operatora

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

su  $|\Phi_-\rangle$  sa svojstvenom vrijednošću 0 te vektori tripleta sa svojstvenom vrijednošću  $2\hbar^2$ .

# Čista i spregnuta stanja

Ako se qubitovi  $A$  i  $B$  nalaze u općenitim stanjima

$$|\phi_A\rangle = \lambda_A |0_A\rangle + \mu_A |1_A\rangle \quad \text{i} \quad |\phi_B\rangle = \lambda_B |0_B\rangle + \mu_B |1_B\rangle,$$

stanje sustava prikazujemo vektorom stanja

$$|\Phi\rangle = |\phi_A \otimes \phi_B\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle,$$

gdje je  $\alpha = \lambda_A \lambda_B$ ,  $\beta = \lambda_A \mu_B$ ,  $\gamma = \mu_A \lambda_B$  i  $\delta = \mu_A \mu_B$ . Uočavamo da vrijedi

$$\alpha\delta = \beta\gamma,$$

što znači da tenzorski produkt  $|\phi_A \otimes \phi_B\rangle$  *ne predstavlja potpuno općenit vektor stanja* u Hilbertovom prostoru  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

**Primjer.** U stanjima

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$$

imamo  $\alpha = \delta = 0$ ,  $\beta = 1/\sqrt{2}$  i  $\gamma = \pm 1/\sqrt{2}$  te uočavamo

$$\alpha\delta \neq \beta\gamma,$$

što znači da ta stanja *nije moguće prikazati tenzorskim produktom*  $|\phi_A \otimes \phi_B\rangle$ , gdje su  $|\phi_A\rangle$  i  $|\phi_B\rangle$  vektori stanja qubitova.

Zaključujemo da tenzorski produkt vektora stanja dvaju qubitova predstavlja samo jedan dio skupa stanja koja dopušta tenzorski produkt Hilbertovih prostora kojima vektori stanja pripadaju.

## Čista i spregnuta stanja dvaju ili više qubitova

- Stanja sustava dvaju ili više qubitova koja je moguće prikazati tenzorskim produktom vektora stanja pojedinih qubitova zovemo *čistim stanjima* (engl. pure states).
- Kad se sustav dvaju ili više qubitova nalazi u stanju koje nije moguće prikazati tenzorskim produktom vektora stanja pojedinih qubitova, kažemo da se sustav nalazi u *spregnutom stanju* (engl. entangled state).

**Primjer.** Stanja sustava dvaju qubitova:

- Iz definicije stanja  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  i  $|11\rangle$  slijedi da su to čista stanja.
- Stanja  $|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$  su spregnuta stanja (vidi prethodni primjer).

Neka se sustav qubitova  $A$  i  $B$  nalazi u spregnutom stanju

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A \otimes 1_B\rangle + |1_A \otimes 0_B\rangle),$$

a  $M \otimes I$  neka je operator koji opisuje fizikalnu veličinu povezanu s qubitom  $A$ . Očekivana vrijednost u spregnutom sustavu je

$$\langle\Phi| (M \otimes I) |\Phi\rangle = \dots = \frac{1}{2} (\langle 0_A | M | 0_A \rangle + \langle 1_A | M | 1_A \rangle).$$

Pokazuje se da ne postoji stanje qubita  $A$  opisano vektorom  $|\phi_A\rangle = \lambda_A |0_A\rangle + \mu_A |1_A\rangle$  koje ima istu očekivanu vrijednost,

$$\begin{aligned} \langle\phi_A| M |\phi_A\rangle &= |\lambda|^2 \langle 0_A | M | 0_A \rangle + |\mu|^2 \langle 1_A | M | 1_A \rangle \\ &\quad + \lambda^* \mu \langle 0_A | M | 1_A \rangle + \mu^* \lambda \langle 1_A | M | 0_A \rangle. \end{aligned}$$



**Primjer.** Energiju interakcije koja proizlazi iz relativne orijentacije spinova dviju čestica spinskog kvantnog broja  $s = 1/2$  možemo opisati hamiltonijanom oblika

$$\hat{H} = \hbar\omega M_{\text{swap}} = \frac{\hbar\omega}{2}(I + \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\sigma}_B).$$

Svojstveni vektori hamiltonijana su

$$|\Phi_{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

sa svojstvenom vrijednošću  $-\hbar\omega$  te triplet

$$|00\rangle, \quad |\Phi_{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad |11\rangle,$$

sa svojstvenom vrijednošću  $\hbar\omega$ .

**Primjer.** Neka se sustav dvaju spinova u  $t = 0$  nalazi u stanju

$$|\Phi[0]\rangle = |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_+\rangle + |\Phi_-\rangle)$$

koje nije spregnuto, a izrazili smo ga kao linearnu kombinaciju dvaju spregnutih stanja koja odgovaraju svojstvenim stanjima hamiltonijana iz prethodnog primjera. Vremenska evolucija tog stanja daje

$$|\Phi[t]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\omega t} |\Phi_+\rangle + e^{i\omega t} |\Phi_-\rangle) = \cos \omega t |10\rangle - i \sin \omega t |01\rangle.$$

Uočavamo da za  $\omega t = \pi/4$ , početno stanje koje nije bilo spregnuto prelazi u spregnuto stanje

$$|\Phi[\pi/4\omega]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle - i |01\rangle).$$

# Operator stanja (ili operator gustoće)

Razmotrimo sustav koji se sastoji od dva podsustava,  $A$  i  $B$ , unutar kojih koristimo ortonormirane baze  $\{|i\rangle\}$  i  $\{|\mu\rangle\}$ .

Općenito stanje sustava možemo izraziti kao

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,\mu} \alpha_{i\mu} |i \otimes \mu\rangle ,$$

bez obzira na to nalazi li se taj sustav u spregnutom stanju ili ne.

Kad se sustav nalazi u spregnutom stanju, stanja podsustava  $A$  ili  $B$  nije moguće izraziti vektorima stanja.

Očekivana vrijednost operatora  $M$  koji opisuje neko fizikalno svojstvo podsustava  $A$  je

$$\langle \Phi | (M \otimes I) | \Phi \rangle = \dots = \sum_{i,j} \rho_{ij}^A M_{ji} = \text{Tr}(\rho^A M),$$

gdje operator

$$\rho_{ij}^A = \sum_{\mu} \alpha_{i\mu} \alpha_{j\mu}^*$$

zovemo reduciranim operatorom stanja podsustava  $A$ .

Analogno, očekivana vrijednost operatora  $M$  koji opisuje fizikalno svojstvo podsustava  $B$  je

$$\langle \Phi | (I \otimes M) | \Phi \rangle = \sum_{\mu,\nu} \rho_{\mu\nu}^B M_{\nu\mu}, \quad \text{gdje je} \quad \rho_{\mu\nu}^B = \sum_i \alpha_{i\mu} \alpha_{i\nu}^*.$$

**Primjer.** Ako se sustav qubitova  $A$  i  $B$  nalazi u stanju

$$|\Phi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle,$$

reducirani operator stanja qubita  $A$  je

$$\rho^A = \begin{pmatrix} |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 & \alpha_{00}\alpha_{10}^* + \alpha_{01}\alpha_{11}^* \\ \alpha_{00}^*\alpha_{10} + \alpha_{01}^*\alpha_{11} & |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 \end{pmatrix},$$

a reducirani operator stanja qubita  $B$  je

$$\rho^B = \begin{pmatrix} |\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{10}|^2 & \alpha_{00}\alpha_{01}^* + \alpha_{10}\alpha_{11}^* \\ \alpha_{00}^*\alpha_{01} + \alpha_{10}^*\alpha_{11} & |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2 \end{pmatrix}.$$

**Primjer.** Ako se qubitovi  $A$  i  $B$  nalaze u čistim stanjima

$$|\phi_A\rangle = \lambda_A |0_A\rangle + \mu_A |1_A\rangle \quad \text{i} \quad |\phi_B\rangle = \lambda_B |0_B\rangle + \mu_B |1_B\rangle,$$

sustav  $(AB)$  se nalazi stanju

$$|\phi_A \otimes \phi_B\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle,$$

gdje su  $\alpha_{00} = \lambda_A \lambda_B$ ,  $\alpha_{01} = \lambda_A \mu_B$ ,  $\alpha_{10} = \mu_A \lambda_B$  i  $\alpha_{11} = \mu_A \mu_B$ .

Reducirani operatori stanja qubitova  $A$  i  $B$  tad su

$$\rho^A = \begin{pmatrix} |\lambda_A|^2 & \lambda_A \mu_A^* \\ \lambda_A^* \mu_A & |\mu_A|^2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \rho^B = \begin{pmatrix} |\lambda_B|^2 & \lambda_B \mu_B^* \\ \lambda_B^* \mu_B & |\mu_B|^2 \end{pmatrix}$$

Operatorom stanja moguće je opisati stanje kvantnog sustava neovisno o tome nalazi li se on u čistom ili u spregnutom stanju.

Svojstva operatora stanja  $\rho$  su:

- Očekivana vrijednost operatora  $M$  dana je s  $\langle M \rangle = \text{Tr}(\rho M)$
- Operator stanja je hermitski operator,  $\rho^\dagger = \rho$ .
- Svojstvene vrijednosti  $p_i$  su nenegativne,  $p_i \geq 0$ .
- Trag operatora stanja (zbroy svojstvenih vrijednosti) jednak je jedinici,  $\text{Tr}\rho = \sum_i p_i = 1$ .
- Akko vrijedi  $\rho^2 = \rho$ , sustav je u čistom stanju.

Iz svojstava operatora stanja slijedi da je moguće pronaći bazu  $\{|i\rangle\}$  u kojoj operator stanja ima oblik

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|,$$

a stanje koje taj operator opisuje možemo shvatiti kao “nekoherentnu mješavinu” u kojoj su stanja  $|i\rangle$  prisutna s vjerojatnošću  $p_i$ .

Kad se sustav nalazi u čistom stanju, jedna od svojstvenih vrijednosti operatora stanja (jedna od vjerojatnosti  $p_i$ ) jednaka je jedinici, dok su sve ostale jednake nuli.

Čistom stanju  $|\Phi\rangle$  odgovara operator stanja

$$\rho = |\Phi\rangle \langle \Phi|.$$



# Teorem o nemogućnosti kvantnog kloniranja

Teorem o nemogućnosti kvantnog kloniranja kazuje da nije moguće stanje jednog kvantnog sustava prenijeti na drugi kvantni sustav.

Kada bi kloniranje bilo moguće, postojala bi unitarna transformacija koja stanje jednog qubita prenosi na drugi qubit, na primjer

$$|\chi_1 \otimes \phi\rangle \rightarrow |\chi_1 \otimes \chi_1\rangle.$$

Pretpostavimo li postoji univerzalni operator  $U$  koji provodi kloniranje, imali bismo

$$U|\chi_1 \otimes \phi\rangle = |\chi_1 \otimes \chi_1\rangle, \quad U|\chi_2 \otimes \phi\rangle = |\chi_2 \otimes \chi_2\rangle.$$

Izračunamo li sada skalarni produkt vektora na lijevim stranama prethodnih dviju jednažbi te nakon toga skalarni produkt vektora na desnim stranama, nalazimo uvjet

$$\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle^2,$$

koji može biti ispunjen jedino ako  $|\chi_1\rangle = |\chi_2\rangle$  ili ako  $\langle \chi_1 | \chi_2 \rangle = 0$ , odnosno stanja koja možemo klonirati moraju biti okomita.

Zaključujemo da općenito stanje kvantnog sustava ne možemo klonirati.