

Principi kvantne mehanike

Kvantna računala (SI)

4. studenog 2016.

Principi kvantne mehanike

Princip 1: stanje sustava

Fizikalno stanje u kojem se nalazi neki kvantni sustav prikazujemo normiranim vektorom $|\Phi\rangle$ u N -dimenzionalnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}^{(N)}$. Vektor $|\Phi\rangle$ zovemo *vektorom stanja*.

Normiranost vektora stanja $|\Phi\rangle$: $||\Phi|| = |\langle\Phi|\Phi\rangle| = 1$.

Dimenzija N Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(N)}$ koji koristimo ovisi o prirodi kvantnog sustava koji opisujemo.

Pri opisu kvantnog računala koristimo Hilbertov prostor konačne dimenzije (npr. za prikaz stanja jednog qubita koristimo $\mathcal{H}^{(2)}$).

Princip 2: amplituda vjerojatnosti i mjerenje

Neka se sustav nalazi u stanju Φ . *Amplituda vjerojatnosti* nalaženja tog sustava u stanju Ψ je

$$a(\Phi \rightarrow \Psi) = \langle \Psi | \Phi \rangle ,$$

a vjerojatnost da sustav u stanju Φ bude u stvarnom mjerenju zatečen (*izmjeren*) u stanju Ψ je

$$p(\Phi \rightarrow \Psi) = |a(\Phi \rightarrow \Psi)|^2 = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2.$$

Izmjeriti neki kvantni sustav u stanju Ψ znači podvrgnuti sustav postupku koji ga dovodi u to stanje te ga nakon toga detektirati. Ovisno o tome je li kvantni sustav detektiran u stanju $|\Psi\rangle$ ili nije, kažemo da on jest ili da nije “poršao Ψ -provjeru”.

Operator projekcije

Ako je sustav u stanju Φ u postupku mjerenja prošao “ Ψ -provjeru”, on se nakon te provjere nalazi u stanju Ψ , a samom prolasku odgovara amplituda vjerojatnosti

$$a(\Phi \rightarrow \Psi) = \langle \Psi | \Phi \rangle .$$

“ Ψ -provjeru” prikazujemo kao produkt vektora konačnog stanja sustava $|\Psi\rangle$ i amplitude vjerojatnosti $\langle \Psi | \Phi \rangle$ prelaska sustava iz početnog u konačno stanje,

$$|\Psi\rangle \langle \Psi | \Phi \rangle ,$$

što prepoznavamo kao projekciju vektora stanja $|\Phi\rangle$ na vektor stanja $|\Psi\rangle$.

Operator projekcije (projektor)

Projekciju vektora stanja $|\Phi\rangle$ na vektor stanja $|\Psi\rangle$ možemo izraziti kao djelovanje *operatora projekcije* $\mathcal{P}_\Psi$ na vektor stanja $|\Phi\rangle$,

$$|\mathcal{P}_\Psi \Phi\rangle = \mathcal{P}_\Psi |\Phi\rangle = |\Psi\rangle \langle \Psi | \Phi \rangle .$$

Sam operator projekcije (projektor) možemo izraziti kao

$$\mathcal{P}_\Psi = |\Psi\rangle \langle \Psi| .$$

Primjer. Neka je stanje polarizacije fotona prikazano koristeći ortonormiranu bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ vektorom stanja $|\Phi\rangle = \mu |x\rangle + \lambda |y\rangle$. Projekcija vektora stanja $|\Phi\rangle$ na bazno stanje $|x\rangle$:

$$|\mathcal{P}_x \Phi\rangle = \mathcal{P}_x |\Phi\rangle = |x\rangle \langle x| (\mu |x\rangle + \lambda |y\rangle) = \mu |x\rangle$$

Relacija potpunosti

Neka je $\{|n\rangle ; n = 1, \dots, N\}$ bilo koja ortonorminana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$. Tada zbroj projektore na vektore baze daje jedinični operator,

$$\sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n| = I.$$

Gornju relaciju zovemo relacijom potpunosti.

Relacijom potpunosti nalazimo koeficijente u prikazu općenitog stanja $|\Phi\rangle$ u bazi $\{|n\rangle ; n = 1, \dots, N\}$,

$$|\Phi\rangle = I |\Phi\rangle = \sum_{n=1}^N |n\rangle \langle n|\Phi\rangle = \sum_{n=1}^N \mu_n |n\rangle, \quad \mu_n = \langle n|\Phi\rangle.$$

Komutator operatora

Komutator operatora A i B jest operator definiran izrazom

$$[A, B] = AB - BA.$$

Ako je komutator dvaju operatora jednak nuli, kažemo da ti operatori *komutiraju*. U suprotnom, kažemo da oni *ne komutiraju*.

Primjer. Projektori na vektore ortonormirane baze $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ u $\mathcal{H}^{(N)}$ međusobno komutiraju:

$$[\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_m] = [|n\rangle \langle n|, |m\rangle \langle m|] = \dots = 0$$

Kompatibilne i nekompatibilne provjere

Neka su $\mathcal{P}_\Phi$ i $\mathcal{P}_\Psi$ projektori na stanja Φ i Ψ . Ako ti operatori komutiraju, tj. ako

$$[\mathcal{P}_\Phi, \mathcal{P}_\Psi] = 0,$$

moguće je istovremeno provesti Φ -provjeru i Ψ -provjeru općenitog stanja sustava te kažemo da su te provjere *kompatibilne*. U suprotnom, odgovarajuće provjere nije moguće provesti istovremeno te kažemo su one *nekompatibilne*.

Primjer. Provjere povezane sa stanjima koja odgovaraju vektorima odabrane ortonormirane baze međusobno su kompatibilne.

Maksimalno nekompatibilne provjere i komplementarne baze

Neka su $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ i $\{|\alpha\rangle; \alpha = 1, \dots, N\}$ dvije različite ortonormirane baze istog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^{(N)}$. Ako vrijedi

$$|\langle\alpha|n\rangle|^2 = \frac{1}{N},$$

kažemo da su baze komplementarne, a za provjere koje pripadaju vektorima stanja koji pripadaju različitim bazama kažemo da su maksimalno nekompatibilne.

Primjer. Pri opisu polarizacije fotona, baza $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ i baza $\{|\theta\rangle, |\theta + \pi/2\rangle\}$ su komplementarne baze kad je $\theta = \pi/4$.

Hermitijski operator i očekivana vrijednost

Neka je $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$ odabrana tako da stanjima kvantnog sustava prikazanim vektorima $|n\rangle$ odgovaraju vrijednosti a_n neke fizikalne veličine.

Kad bismo mnogo puta mjerili vrijednost te fizikalne veličine u sustavu koji se nalazi u stanju Φ , srednja vrijednost mjerenja bila bi

$$\sum_n a_n p(\Phi \rightarrow n) = \sum_n a_n |\langle n|\Phi\rangle|^2 = \sum_n a_n \langle\Phi|n\rangle \langle n|\Phi\rangle,$$

što još možemo izraziti kao

$$\langle\Phi|M\Phi\rangle, \quad \text{gdje je} \quad M = \sum_n a_n |n\rangle \langle n|$$

operator kojim opisujemo samu fizikalnu veličinu.

Hermitijski operator

Neka je $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ ortonormirana baza u $\mathcal{H}^{(N)}$, a $\mathcal{P}_n$ neka su projektori na vektore baze. Operator M koji možemo izraziti kao linearnu kombinaciju projektora $\mathcal{P}_n$,

$$M = \sum_{n=1}^N a_n \mathcal{P}_n = \sum_{n=1}^N a_n |n\rangle \langle n|, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

zovemo hermitskim operatorom. Vektori baze $|n\rangle$ su vlastiti vektori tog operatora, a realni koeficijenti a_n su pripadajuće vlastite vrijednosti. Ako M opisuje neku fizikalnu veličinu, onda je a_n vrijednost te fizikalne veličine koju očekujemo kad je sustav u stanju $|n\rangle$.

Očekivana vrijednost hermitskog operatora

Neka se sustav nalazi u stanju Φ , a M neka je hermitski operator. Veličinu

$$\langle M \rangle_{\Phi} = \langle \Phi | M \Phi \rangle$$

zovemo očekivanom vrijednošću operatora M u stanju $|\Phi\rangle$

Napišemo li $M = \sum_n a_n |n\rangle \langle n|$, lako je pokazati da za sustav u stanju Φ vrijedi

$$\langle M \rangle_{\Phi} = \dots = \sum_n a_n p(\Phi \rightarrow n).$$

Primjer. Polarizaciju fotona možemo opisati fizikalnom veličinom definiranom tako da stanju linearne polarizacije fotona u smjeru x -osi (vektor stanja $|x\rangle$) pridružimo vrijednost $+1$, a stanju linearne polarizacije u smeru y -osi (vektor stanja $|y\rangle$) pridružimo vrijednost -1 . Hermitski operator kojim opisujemo tu fizikalnu veličinu je

$$M = (+1) |x\rangle \langle x| + (-1) |y\rangle \langle y|.$$

Ako je foton u stanju kružne polarizacije

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle),$$

očekivana vrijednost hermitskog operatora M je

$$\langle M \rangle_R = \langle R | M R \rangle = \dots = 0.$$

Vektori, dualni vektori i skalarni produkt

Vektore ortonormirane baze $\{|x\rangle, |y\rangle\}$ u $\mathcal{H}^{(2)}$ možemo prikazati vektor-stupcima,

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Općeniti vektor je tada

$$|\Phi\rangle = \lambda |x\rangle + \mu |y\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

a odgovarajući dualni vektor (bra-simbol) prikazuje se vektor-retkom

$$\langle\Phi| = \lambda^* \langle x| + \mu^* \langle y| = (\lambda^* \quad \mu^*).$$

Skalarni produkt vektora

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

može se izračunati unutarnjim množenjem vektor-retka koji prikazuje dualni vektor $\langle\Psi|$ i vektor-stupca koji prikazuje vektor $|\Phi\rangle$

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = (\nu^* \quad \sigma^*) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \nu^* \lambda + \sigma^* \mu.$$

Primjer. Projekcija $|\Phi\rangle$ na $|x\rangle$:

$$\mathcal{P}_x |\Phi\rangle = |x\rangle \langle x|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left((1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operator projekcije

Neka su

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix}$$

vektori. Operator projekcije na stanje prikazano vektorom $|\Phi\rangle$ prikazuje se matricom koju dobivamo vanjskim množenjem vektora-stupca i vektora-retka kojima prikazujemo $|\Phi\rangle$ i $\langle\Phi|$,

$$\mathcal{P}_\Phi = |\Phi\rangle \langle\Phi| = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \otimes (\lambda^* \quad \mu^*) = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \lambda\mu^* \\ \mu\lambda^* & |\mu|^2 \end{pmatrix}$$

Projekciju vektora $|\Psi\rangle$ na vektor $|\Phi\rangle$ dobivamo matričnim množenjem

$$\mathcal{P}_\Phi |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & \lambda\mu^* \\ \mu\lambda^* & |\mu|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2\nu + \lambda\mu^*\sigma \\ \mu\lambda^*\nu + |\mu|^2\sigma \end{pmatrix}$$

Primjer. Projektori na bazna stanja $|x\rangle$ i $|y\rangle$:

$$\mathcal{P}_x = |x\rangle \langle x| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_y = |y\rangle \langle y| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zbroj projektora daje operator identiteta:

$$\mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Primjer. Stanja desne i lijeve kružne polarizacije:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle)$$

Projektori na ta stanja:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{R,L} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \pm i|y\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle x| \mp i\langle y|) \\ &= \frac{1}{2} (|x\rangle \langle x| \mp i|x\rangle \langle y| \pm i|y\rangle \langle x| + |y\rangle \langle y|) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mp i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uočava se $\mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L = I$.

Hermitski operator i hermitsko konjugiranje

Koristimo li u $\mathcal{H}^{(N)}$ bazu $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$, vektor stanja $|n\rangle$ dogovorno prikazujemo vektor-stupcem koji svuda ima nule osim na n -tom mjestu odozgo gdje ima jedinicu. j -ti element tog vektor-stupca možemo izraziti kao

$$(|n\rangle)_j = \delta_{jn}.$$

Dualni vektor (bra) prikazujemo vektor-retkom $(\langle m|)_i = \delta_{mi}$.

Ako je M općenit operator u $\mathcal{H}^{(N)}$, element u m -tom retku i n -tom stupcu matričnog prikaza tog operatora se može izraziti kao

$$(M)_{mn} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{mi} M_{ij} \delta_{jn} = \langle m| M |n\rangle.$$

Neka je

$$M = \sum_{n=1}^N a_n |n\rangle \langle n|, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

Hermitski operator. U bazi $\{|n\rangle; n = 1, \dots, N\}$ taj je operator prikazan diagonalnom matricom pri čemu se elementi na dijagonali podudaraju sa svojstvenim vrijednostima operatora,

$$(M)_{mn} = \langle m| M |n\rangle = a_m \delta_{mn}.$$

U općenitoj bazi $\{|\alpha\rangle, \alpha = 1, \dots, N\}$ čiji se vektori ne podudaraju sa svojstvenim vektorima hermitskog operatora M , elementi matrice kojom prikazujemo taj operator imaju svojstvo

$$\begin{aligned}(M)_{\alpha\beta} &= \langle\alpha| M |\beta\rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle\alpha|n\rangle \langle n|\beta\rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle\beta|n\rangle^* \langle n|\alpha\rangle^* \\ &= \left(\sum_{n=1}^N a_n \langle\beta|n\rangle \langle n|\alpha\rangle \right)^* = \langle\beta| M |\alpha\rangle^* = ((M)_{\beta\alpha})^*.\end{aligned}$$

To znači da matrica koja prikazuje hermitski operator ostaje nepromijenjena ako ju transponiramo i kompleksno konjugiramo.

Hermitsko konjugiranje matrice

Hermitsko konjugiranje matrice jest transformacija koja se sastoji od kompleksne konjugacije i transpozicije matrice (redosljed operacija kompleksne konjugacije i transpozicije nije od važnosti). Hermitsko konjugiranje matrice M obilježavamo simbolom $\dagger$ (“bodež”),

$$M^\dagger = (M^*)^T = (M^T)^*,$$

dok za komponente matrice vrijedi $(M^\dagger)_{ij} = (M^*)_{ji} = ((M)_{ji})^*$.

Matrični prikaz hermitskog operatora

Matrični prikaz hermitskog operatora M invarijantan je na operaciju hermitskog konjugiranja,

$$M^\dagger = M \quad (\text{hermitski operator}).$$