Polarizacija fotona i Qubit

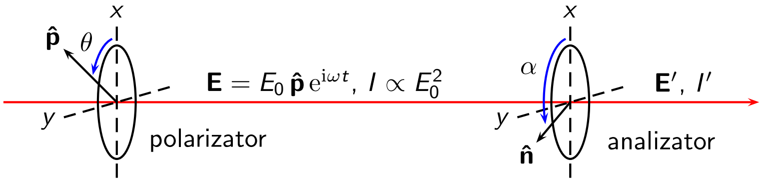
SI

14. listopada 2016.

Snop svjetlosti u klasičnoj fizici, polarizacija

U klasičnoj fizici, snop svjetlosti shvaćamo kao elektromagnetski val koji može biti polariziran na različite načine.

Prolaskom kroz polarizator, val postaje linearno polariziran:



Prolaskom kroz sljedeći polarizator (tzv. analizator):

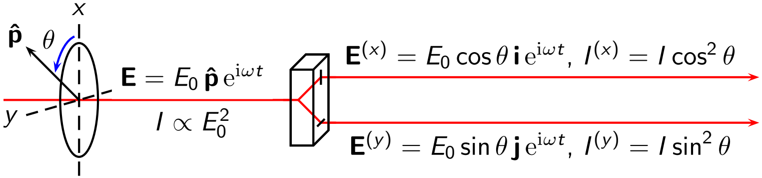
$$\mathbf{E}' = (\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,\hat{\mathbf{n}} = E_0(\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = E_0\cos[\theta-\alpha]\,\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$\Longrightarrow \qquad I' = I\cos^2[\theta-\alpha] \qquad \text{(Malusov zakon)}$$

Rastavljanje snopa svjetlosti na lin. pol. snopove

Bilo kakav snop svjetlosti je moguće rastaviti na dva linearno polarizirana snopa s međusobno okomitim smjerovima polarizacije.

Ovdje rastavljamo linearno polarizirani snop:



Uočavamo:

$$\mathbf{E}^{(x)} + \mathbf{E}^{(y)} = E_0(\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = E_0\,\hat{\mathbf{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathbf{E}$$

$$I^{(x)} + I^{(y)} = I \qquad \text{(očuvanje energije)}$$

Snop svjetlosti kao niz fotona i vjerojatnost

U kvantnoj fizici, snop svjetlosti shvaćamo kao niz fotona.

Detektor (brojač) može zabilježiti samo cijeli broj fotona $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} = 0, 1, 2, \ldots$$

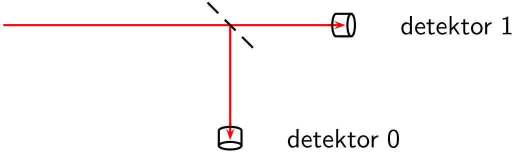
Intenzitet snopa (I) je razmjeran broju fotona ($\mathcal{N}$) koji u jedinici vremena prolaze nekom plohom (npr. ulaze u detektor):

$$I \propto \frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}t}$$

Postoje eksperimenti u kojima niti u načelu nije moguće predvidjeti gibanje pojedinog fotona.

Ishodima eksperimenata pridružujemo vjerojatnosti.

Primjer. Polupropusno zrcalo i generator slučajnih brojeva:

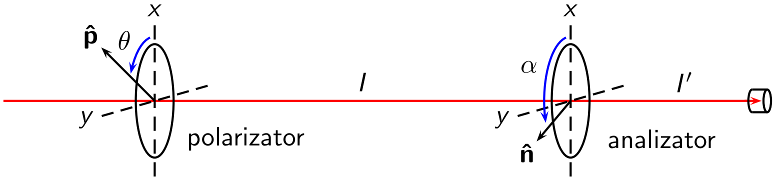


Niti u načelu nije moguće predvidjeti putanju (detektor) koju će foton odabrati.

Detektori proizvode niz: 0,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1,0,1,1,0,0,0,1,0,0,. . .

Taj niz možemo koristiti kao generator slučajnih brojeva.

Primjer. Fotoni linearno polariziranog snopa nailaze na analizator:

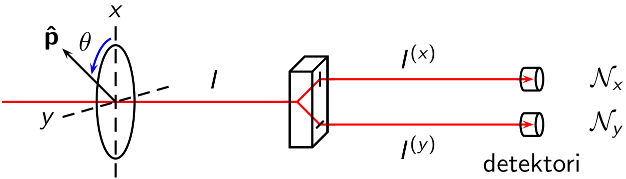


Niti u načelu nije moguće predvidjeti hoće li foton proći kroz analizator ili će biti apsorbiran (osim ako $\theta - \alpha = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \dots$).

Na osnovi Malusova zakona zaključujemo da je vjerojatnost prolaska fotona linearno polariziranog snopa (orijentacija θ) kroz analizator (orijentacija α):

$$p(\theta \to \alpha) = \frac{I'}{I} = \cos^2[\theta - \alpha].$$

Primjer. Rastavljanje snopa i detekcija fotona:



Niti u načelu nije moguće predvidjeti putanju (detektor) koju će foton odabrati.

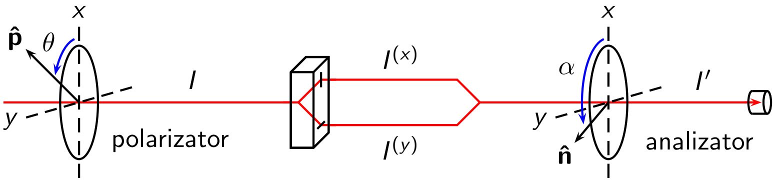
Kad bismo detektirali $\mathcal{N} = \mathcal{N}_x + \mathcal{N}_y$ fotona, vrijedile bi relacije:

$$\lim_{\mathcal{N}\to\infty} \frac{\mathcal{N}_x}{\mathcal{N}} = \frac{I^{(x)}}{I} = \cos^2\theta \qquad \lim_{\mathcal{N}\to\infty} \frac{\mathcal{N}_y}{\mathcal{N}} = \frac{I^{(y)}}{I} = \sin^2\theta$$

Vjerojatnosti da foton odabere jednu ili drugu putanju:

$$p(\theta \to x) = \cos^2\theta \qquad p(\theta \to y) = \sin^2\theta$$

Primjer. Eksperiment s dvije putanje u kojem ne možemo znati koju je putanju foton odabrao na putu do detektora:



Eksperiment pokazuje: $p(\theta \to \alpha) = I'/I = \cos^2[\theta - \alpha]$

VAŽNO: Zbrajanjem složenih vjerojatnosti dobivamo rezultat koji *nije* u skladu s eksperimentom:

$$\begin{aligned} p(\theta \to \alpha) &= p(\theta \to x \to \alpha) + p(\theta \to y \to \alpha) \\ &= p(\theta \to x)\, p(x \to \alpha) + p(\theta \to y)\, p(y \to \alpha) \\ &= \cos^2\theta \cos^2\alpha + \sin^2\theta \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Amplituda vjerojatnosti u kvantnoj mehanici

U kvantnoj mehanici, događaju $\alpha \longrightarrow \beta$ pridružujemo amplitudu vjerojatnosti

$$a(\alpha \longrightarrow \beta).$$

Amplituda vjerojatnosti $a(\alpha \longrightarrow \beta)$ je kompleksan broj.

Vjerojatnost događaja $\alpha \longrightarrow \beta$ jest kvadrat modula odgovarajuće amplitude vjerojatnosti,

$$p(\alpha \longrightarrow \beta) = |a(\alpha \longrightarrow \beta)|^2.$$

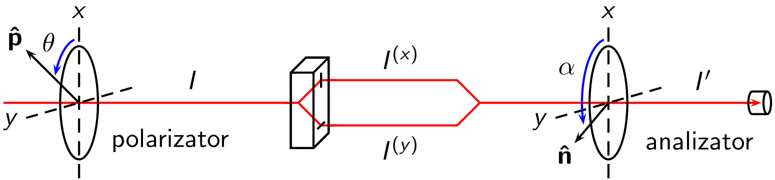
Amplituda vjerojatnosti složenog događaja $\alpha \to \beta \to \gamma$:

$$a(\alpha \to \gamma) = a(\alpha \to \beta \to \gamma) = a(\alpha \to \beta)\, a(\beta \to \gamma)$$

Amplituda vjerojatnost događaja koji se može odviti na dva načina, $\alpha \to \beta_1 \to \gamma$ i $\alpha \to \beta_2 \to \gamma$, ako niti u načelu ne možemo znati na koji se način događaj odvio:

$$\begin{aligned} a(\alpha \to \gamma) &= a(\alpha \to \beta_1 \to \gamma) + a(\alpha \to \beta_2 \to \gamma) \\ &= a(\alpha \to \beta_1)\, a(\beta_1 \to \gamma) + a(\alpha \to \beta_2)\, a(\beta_2 \to \gamma) \end{aligned}$$

Primjer. Eksperiment s dvije putanje...



Uzmemo li kao amplitude vjerojatnosti pojedinih događaja:

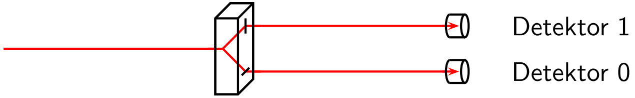
$$a(\theta \to x) = \cos\theta \qquad a(x \to \alpha) = \cos\alpha$$
$$a(\theta \to y) = \sin\theta \qquad a(y \to \alpha) = \sin\alpha$$

Ukupna amplituda vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} a(\theta \to \alpha) &= a(\theta \to x)\, a(x \to \alpha) + a(\theta \to y)\, a(y \to \alpha) \\ &= \cos\theta\, \cos\alpha + \sin\theta\, \sin\alpha \\ &= \cos[\theta - \alpha] \end{aligned}$$

Polarizacija fotona kao realizacija kvantnog bita

Foton može biti u bilo kojem od beskonačno mnogo različitih stanja polarizacije (linearna polarizacija različitih orijentacija ili općenito eliptična polarizacija), no mjerenjem je moguće razlučiti samo dvije različite vrijednosti, ovdje 0 ili 1.



Stanje polarizacije fotona je moguća realizacija kvantnog bita ili qubita.

Usporedba klasičnog i kvantnog bita ili qubita:

- Klasični bit može biti u bilo kojem od dva različita stanja. Qubit može biti u bilo kojem od beskonačno mnogo različitih stanja.
- Mjerenjem stanja klasičnog bita ili qubita dobivamo jednu od samo dvije različite vrijednosti.
- Stanje klasičniog bita možemo izmjeriti proizvoljno mnogo puta. Stanje qubita možemo izmjeriti samo jednom.

Prikaz polarizacije fotona u 2D Hilbertovom prostoru

Stanje polarizacije fotona koji je linearno polariziran u x i onog koji je linearno polariziran u y-smjeru prikazujemo tzv. *ket*-simbolima

$$|x\rangle \qquad \text{i} \qquad |y\rangle$$

koje shvaćamo kao vektore ortonormirane baze dvodimenzionalnog kompleksnog *Hilbertovog* vektorskog prostora $\mathcal{H}^2$.

Bilo koje stanje polarizacije fotona (linearne, cirkularne ili općenito eliptične) također prikazujemo ket-simbolom, a možemo ga izraziti kao linearnu kombinaciju vektora baze $|x\rangle$ i $|y\rangle$,

$$|\Phi\rangle = \lambda\,|x\rangle + \mu\,|y\rangle\,, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Skalarni produkt i norma vektora u $\mathcal{H}$

U Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, skalarni produkt vektora ima svojstva

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle^* \in \mathbb{C}, \qquad \langle\Phi|\Phi\rangle \geq 0.$$

Norma vektora $|\Phi\rangle$ je

$$||\Phi|| = \sqrt{\langle\Phi|\Phi\rangle}.$$

Simbole $\langle\Phi|$ i $|\Phi\rangle$ zovemo *bra* i *ket*-simbolom, a zapis skalarnog produkta $\langle\Psi|\Phi\rangle$ zovemo *braketom*. Notacija koja koristi bra i ket simbole je u kvantnoj mehanici poznata kao Diracova notacija.

Ako vektori $|x\rangle$ i $|y\rangle$ čine ortonormiranu bazu dvodimenzionalnog Hilbertovog prostora $\mathcal{H}^2$, vrijedi

$$\langle x|y\rangle = 0, \qquad \langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1.$$

Izrazimo li vektore $|\Phi\rangle$ i $|\Psi\rangle$ koristeći bazu $\{|x\rangle, |y\rangle\}$,

$$|\Phi\rangle = \lambda\,|x\rangle + \mu\,|y\rangle\,, \qquad |\Psi\rangle = \nu\,|x\rangle + \sigma\,|y\rangle\,,$$

skalarni produkt vektora $|\Phi\rangle$ i $|\Psi\rangle$ i norma vektora $|\Phi\rangle$ su:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \nu^*\lambda + \sigma^*\mu = \langle\Phi|\Psi\rangle^* \qquad ||\Phi||^2 = \langle\Phi|\Phi\rangle = |\lambda|^2 + |\mu|^2$$

Amplituda vjerojatnosti i mjerenje

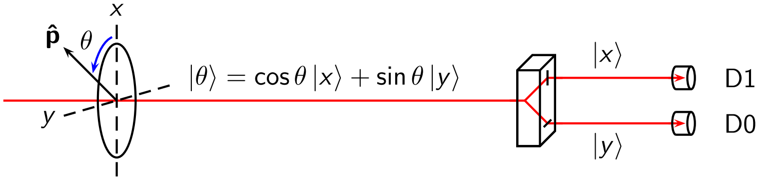
Stanja polarizacije fotona prikazujemo normiranim vektorima u $\mathcal{H}^2$. Ako vektori $|\Phi\rangle$, $|\Psi\rangle$ itd. predstavljaju stanja polarizacije,

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = 1, \quad \langle\Psi|\Psi\rangle = 1, \quad \ldots$$

Skalarni produkt vektora $|\Phi\rangle$ i $|\Psi\rangle$ odgovara amplitudi vjerojatnosti da foton u stanju polarizacije $|\Phi\rangle$ bude izmjeren (detektiran) u stanju polarizacije $|\Psi\rangle$.

$$a(\Phi \to \Psi) = \langle\Psi|\Phi\rangle \, .$$

Primjer. Mjerenje stanja polarizacije linearno polariziranog fotona:



Prolaskom kroz polarizator, foton je u stanju linearne polarizacije

$$|\theta\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle\,.$$

Vjerojatnosti da takav foton bude izmjeren u stanju polarizacije $|x\rangle$ (detektiran u D1) odnosno u stanju polarizacije $|y\rangle$ (D0):

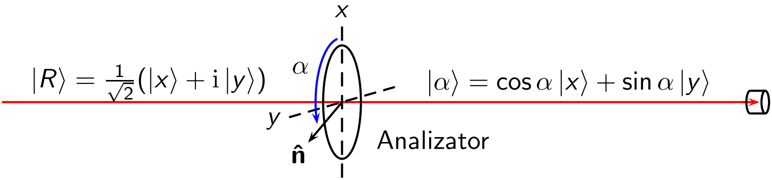
$$\text{D1:}\qquad p(\theta \to x) = |a(\theta \to x)|^2 = |\langle x|\theta\rangle|^2 = \cos^2\theta$$

$$\text{D0:}\qquad p(\theta \to y) = |a(\theta \to y)|^2 = |\langle y|\theta\rangle|^2 = \sin^2\theta$$

Primjer. Vjerojatnost prolaska cirkularno polariziranog fotona

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle)$$

kroz analizator ne ovisi o orijentaciji analizatora:



$$p(R \to \alpha) = |\,\langle\alpha|R\rangle\,|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha + \frac{(-\mathrm{i})}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right|^2 = \cdots = \frac{1}{2}$$