Fizika (program FER3):
Zadaci za vježbu preuzeti iz ranijeg programa

FER/ZPF/SI

27. veljače 2019.

(Posljednja korekcija: 6. svibnja 2022.)

Sadržaj

1 PRVI CIKLUS

1.1 Kinematika

Zadatak 1.1.1: Raketa je lansirana sa Zemlje vertikalno uvis. Početna brzina rakete jednaka je nuli. Prvih $\tau = 15\,\mathrm{s}$, koliko traje rad motora, ona se uspinje s akceleracijom iznosa $2g$. Po prestanku rada motora raketa se neko vrijeme nastavlja uspinjati, a nakon što dosegne najvišu točku nad tlom, raketa pada na tlo. Odredite najveću visinu nad tlom koju raketa postiže te ukupno trajanje njenog leta.

Postupak: Uzmemo li da x-os gleda uvis, prva faza gibanja rakete je gibanje stalnom akceleracijom $\mathbf{a} = 2g\,\hat{\mathbf{x}}$. Uzmemo li da gibanje počinje u trenutku $t = 0$ na visini $x = 0$, opisujemo ga s

$$x[t] = \frac{2g}{2}t^2 = gt^2, \qquad v_x[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x[t] = 2gt \qquad (0 <= t <= \tau).$$

U trenutku $t = \tau$ u kojem prestaje rad motora visina i brzina rakete su

$$x[\tau] = g\tau^2, \qquad v_x[\tau] = 2g\tau.$$

Iduća faza gibanja rakete je njen slobodan pad, odnosno gibanje stalnom akceleracijom $\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{x}}$. U toj fazi visinu opisujemo izrazom

$$x[t] = x[\tau] + v_x[\tau](t-\tau) - \frac{g}{2}(t-\tau)^2 \tag{1}$$

$$= -\frac{g}{2}\,t^2 + 3g\tau\,t - \frac{3g\tau^2}{2} \qquad (\tau \le t \le t_{\mathrm{uk}}). \tag{2}$$

Uočavamo da je visina kvadratična funkcija vremena (parabola) s maksimumom (tjemenom) u trenutku $t_{\max} = 3\tau$ pri visini

$$h_{\max} = x_{\max} = x[t_{\max}] = 3g\tau^2 \simeq 6.62\,\mathrm{km}.$$

Ukupno trajanje leta nalazimo iz uvjeta $x[t_{\mathrm{uk}}] = 0$ koji, nakon rješavanja kvadratne jednadžbe, daje dva rješenja,

$$(t_{uk})_{1,2} = \left(3 \pm \sqrt{6}\right)\tau.$$

Ranije rješenje (ono s negativnim predznakom) odgovara trenutku prije početka druge faze gibanja te ga odbacujemo. Slijedi

$$t_{\mathrm{uk}} = \left(3 + \sqrt{6}\right)\tau \simeq 81.7\,\mathrm{s}.$$

Rješenje: $h_{\max} = 3g\tau^2 \simeq 6.62\,\mathrm{km}$, $t_{\mathrm{uk}} = \left(3+\sqrt{6}\right)\tau \simeq 81.7\,\mathrm{s}$

Zadatak 1.1.2: Avion A leti na visini $h_A = 8\,\mathrm{km}$ u smjeru sjevera brzinom iznosa $v_A = 500\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a avion B se u nekom trenutku nalazi $d = 10\,\mathrm{km}$ sjeverozapadno u odnosu na avion A te leti na visini $h_B = 10\,\mathrm{km}$ brzinom iznosa $v_B = 700\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ prema istoku. Kolika će biti najmanja udaljenost među avionima nastave li letjeti nepromijenjenim brzinama?

Postupak: Izračunat ćemo udaljenost među avionima, izraziti ju kao funkciju vremena, te pronaći minimum te funkcije.

Uzmemo li da x-os gleda prema istoku, a y-os prema sjeveru, te uzmemo li $t = 0$ kao početni trenutak, početni položaji aviona su

$$\mathbf{r}_A[0] = h_A\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{r}_B[0] = d\,\frac{-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} + h_B\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Brzine aviona koje smatramo stalnima su

$$\mathbf{v}_A = v_A\,\hat{\mathbf{y}}, \qquad \mathbf{v}_B = v_B\,\hat{\mathbf{x}}.$$

Položaji aviona u tijekom vremena su

$$\mathbf{v}_A[t] = \mathbf{r}_A[0] + \mathbf{v}_A t = v_A t\,\hat{\mathbf{y}} + h_A\,\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{v}_B[t] = \mathbf{r}_B[0] + \mathbf{v}_B t = \left(-\frac{d}{\sqrt{2}} + v_B t\right)\hat{\mathbf{x}} + \frac{d}{\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{y}} + h_B\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Relativni položaj aviona B u odnosu na avion A je

$$\mathbf{v}_{BA}[t] = \mathbf{r}_B[t] - \mathbf{r}_A[t] = \left(-\frac{d}{\sqrt{2}} + v_B t\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{d}{\sqrt{2}} - v_A t\right)\hat{\mathbf{y}} + (h_B - h_A)\,\hat{\mathbf{z}},$$

a kvadrat udaljenosti među avionima je

$$\begin{aligned} r_{BA}^2[t] = \mathbf{v}_{BA}[t]\cdot\mathbf{v}_{BA}[t] &= \left(-\frac{d}{\sqrt{2}} + v_B t\right)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{2}} - v_A t\right)^2 + (h_B - h_A)^2 \\ &= (v_A^2 + v_B^2)t^2 - \sqrt{2}d(v_A + v_B)t + d^2 + (h_B - h_A)^2 \end{aligned}$$

Prepoznajemo da je kvadrat udaljenosti među avionima kvadratična funkcija vremena (parabola) s minimumom (tjemenom) u trenutku

$$t_{\min} = \frac{d(v_A + v_B)}{\sqrt{2}(v_A^2 + v_B^2)},$$

čemu odgovara minimalna udaljenost

$$r_{\min} = \sqrt{r_{AB}^2[t_{\min}]} = \sqrt{(h_B - h_A)^2 + d^2\left(\frac{1}{2} - \frac{v_A v_B}{v_A^2 + v_B^2}\right)} \simeq 2.60\,\mathrm{km}.$$

Rješenje: $r_{\min} = \sqrt{(h_B - h_A)^2 + d^2\left(\frac{1}{2} - \frac{v_A v_B}{v_A^2 + v_B^2}\right)} \simeq 2.60\,\mathrm{km}$

Zadatak 1.1.3: Položaj čestice u x, y-ravnini opisan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = A(\sin[\omega t]\,\hat{\mathbf{x}} + \sin[2\omega t]\,\hat{\mathbf{y}}),$$

gdje su A i ω konstante. Skiciraj putanju čestice u x, y-ravnini, izvedi izraz za putanju čestice u obliku $y[x]$, te odredi najveću udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava koju čestica postiže tokom gibanja.

Postupak: Koordinate položaja čestice su

$$x[t] = A\sin[\omega t] \qquad \text{i} \qquad y[t] = A\sin[2\omega t].$$

Koristeći $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ možemo napisati

$$y[t] = 2A\sin[\omega t]\cos[\omega t] = \pm 2x[t]\sqrt{1-(x[t]/A)^2}$$

gdje gornji predznak $(+)$ vrijedi za $\cos[\omega t] > 0$, a donji $(-)$ za $\cos[\omega t] < 0$, odnosno,

$$y[x] = \pm 2x\sqrt{1-(x/A)^2}.$$

Kvadrat udaljenosti čestice od ishodišta je

$$r^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 4x^2\big(1-(x/A)^2\big).$$

Ekstreme te veličine pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 = 2x + 8x\big(1-(x/A)^2\big) + 4x^2\big(-2x/A^2\big) = 2x\big(5 - 8x^2/A^2\big),$$

što je ispunjeno za $x = 0$ te za $x^2 = 5A^2/8$. Za $x = 0$ dobivamo $r^2 = 0$ što je minimum, dok za $x^2 = 5A^2/8$ dobivamo maksimum

$$r^2 = \frac{5}{8}A^2 + 4\frac{5}{8}A^2\left(1-\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{16}A^2.$$

Slijedi da je najveća udaljenost čestice od ishodišta

$$r_{\max} = \frac{5}{4}A.$$

Rješenje: $y[x] = \pm 2x\sqrt{1-(x/A)^2}$, $r_{\max} = 5A/4$

Zadatak 1.1.4: Položaj čestice u ravnini $z = 0$ opisan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = v_0 t\,\hat{\mathbf{x}} + A\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\,\hat{\mathbf{y}},$$

gdje su $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $A = 1\,\mathrm{m}$ i $\lambda = 5\,\mathrm{m}$ konstante. Odredi maksimalne iznose brzine i akceleracije koje čestica postiže tokom ovog gibanja.

Postupak: Vektor brzine čestice je derivacija vektora položaja po vremenu,

$$\mathbf{v}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}[t] = v_0\,\hat{\mathbf{x}} + A(2\pi v_0/\lambda)\cos[2\pi v_0 t/\lambda]\,\hat{\mathbf{y}},$$

a iznos brzine je modul tog vektora,

$$v[t] = |\mathbf{v}[t]| = \sqrt{\mathbf{v}[t]\cdot\mathbf{v}[t]} = \sqrt{v_0^2 + A^2(2\pi v_0/\lambda)^2\cos^2[2\pi v_0 t/\lambda]}.$$

Iznos brzine je najveći kad je $\cos[2\pi v_0 t/\lambda] = \pm 1$, odnosno

$$v_{\mathrm{max}} = v_0\sqrt{1 + (2\pi A/\lambda)^2} \simeq 3.212\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Vektor akceleracije je derivacija vektora brzine po vremenu,

$$\mathbf{a}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}[t] = -A(2\pi v_0/\lambda)^2\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\,\hat{\mathbf{y}},$$

a iznos akceleracije je

$$a[t] = |\mathbf{a}[t]| = \sqrt{\mathbf{a}[t]\cdot\mathbf{a}[t]} = A(2\pi v_0/\lambda)^2\,\big|\sin[2\pi v_0 t/\lambda]\big|.$$

Iznos akceleracije ne najveći pri $\sin[2\pi v_0 t/\lambda] = \pm 1$, odnosno

$$a_{\mathrm{max}} = A(2\pi v_0/\lambda)^2 \simeq 6.316\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Rješenje: $v_{\mathrm{max}} = v_0\sqrt{1 + (2\pi A/\lambda)^2} \simeq 3.212\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a_{\mathrm{max}} = A(2\pi v_0/\lambda)^2 \simeq 6.316\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Zadatak 1.1.5: Položaj čestice u prostoru dan je vektorom

$$\mathbf{r}[t] = R\left(\cos[\omega t]\,\hat{\mathbf{x}} + \sin[\omega t]\,\hat{\mathbf{y}}\right) + Vt\,\hat{\mathbf{z}},$$

gdje je t vrijeme, R, ω i V su konstante, a $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ i $\hat{\mathbf{z}}$ su jedinični vektori pravokutnog koordinatnog sustava. Odredi duljinu puta koju čestica prevali duž vlastite putanje u vremenskom intervalu od $t_1 = 0$ do $t_2 = 2\pi/\omega$.

Postupak: Element prevaljenog puta je

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\mathbf{r}| = |\mathbf{v}\,\mathrm{d}t| = |\mathbf{v}|\,\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}t.$$

Brzina čestice je

$$\mathbf{v}[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}[t] = R\omega\left(-\sin[\omega t]\,\hat{\mathbf{x}} + \cos[\omega t]\,\hat{\mathbf{y}}\right) + V\,\hat{\mathbf{z}},$$

a njen je iznos

$$v[t] = |\mathbf{v}[t]| = \sqrt{\mathbf{v}[t]\cdot\mathbf{v}[t]} = \sqrt{(R\omega)^2 + V^2}.$$

Prevaljeni put u intervalu od t_1 do t_2 je

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} v[t]\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi/\omega} \sqrt{(R\omega)^2 + V^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{(R\omega)^2 + V^2}.$$

Rješenje: $s = (2\pi/\omega)\sqrt{(R\omega)^2 + V^2}$

Zadatak 1.1.6: Odredi najmanji mogući iznos početne brzine projektila i odgovarajući kut izbačaja (u odnosu na vodoravnu os) kojime možemo pogoditi metu koja se nalazi na visini $h = 5\,\mathrm{m}$ te na vodoravnoj udaljenosti $d = 12\,\mathrm{m}$ u odnosu na točku izbačaja. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Putanja projektila izbačenog brzinom iznosa v_0 iz točke $x = y = 0$ pod kutem α u odnosu na vodoravnu x-os (y-os je uspravna) opisana je poznatim izrazom

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2), \quad \text{gdje je} \quad u = \tan\alpha.$$

Ako projektil pogađa metu pri $x = d$, $y = h$, na osnovu gornjeg izraza imamo

$$h = du - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1+u^2),$$

iz čega slijedi izraz za brzinu izbačaja

$$v_0^2 = \frac{gd}{2}\frac{1+u^2}{u-h/d}.$$

Minimum v_0^2 u odnsou na u pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}v_0^2 = \frac{gd}{2}\frac{u^2-2(h/d)u-1}{(u-h/d)^2},$$

koji je ispunjen za

$$u_{1,2} = \tan\alpha_{1,2} = h/d \pm \sqrt{1+(h/d)^2}.$$

Odabiremo pozitivno rješenje, u_1, te uvrštavanjem istoga u izraz za v_0^2 slijedi

$$(v_0^2)_{\min} = gd\left(h/d + \sqrt{1+(h/d)^2}\right).$$

Za zadane vrijednosti

$$u_1 = 2/3, \qquad \alpha_1 \simeq 56.31°, \qquad (v_0)_{\min} \simeq 13.28\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\tan\alpha = h/d + \sqrt{1+(h/d)^2} = 2/3$, $\alpha \simeq 56.31°$, $v_0^2 = gd\left(h/d + \sqrt{1+(h/d)^2}\right)$, $v_0 \simeq 13.28\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Zadatak 1.1.7: Klinac ima praćku kojom može izbaciti kamen brzinom početnog iznosa $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ te stoji na udaljenosti $d = 5\,\mathrm{m}$ od uspravnog zida. On želi kamenom pogoditi što je moguće višu točku na zidu. Odredi kut u odnosu na vodoravnu ravninu pod kojim mora izbaciti kamen. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Ishodište pravokutnog koordinatnog sustava neka se nalazi tamo gdje je praćka, x-os neka je vodoravna i usmjerena prema zidu, a y-os neka je uspravna i usmjerena prema gore. Putanja kamena izbačenog iz ishodišta brzinom iznosa v_0 pod kutom α u odnosu na x-os dana je izrazom

$$y = xu - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2), \quad \text{gdje je} \quad u = \tan\alpha.$$

Kamen pogađa zid u točki $x = d$, $y = h$, pa imamo

$$h = du - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1+u^2).$$

Za danu udalnost do zida d i početnu brzinu kamena v_0 visina h na kojoj kamen pogađa zid ovisi o kutu izbačaja pa tražimo maksimum h u odnosu na $u = \tan\alpha$,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}h = d\Big(1 - \frac{gd}{v_0^2}\,u\Big),$$

što je ispunjeno za

$$u = \frac{v_0^2}{gd}.$$

Za zadane vrijednosti

$$u \simeq 2.039, \qquad \alpha \simeq 63.87^\circ.$$

Rješenje: $\alpha = \arctan[v_0^2/gd] \simeq 63.87^\circ$

Zadatak 1.1.8: Odredi trajanje leta zračnog broda (zeppelina) od grada A do grada B koji se nalazi $d = 160\,\mathrm{km}$ sjeverno u odnosu na grad A, ako brzina broda u odnosu na zrak iznosi $v' = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a prisutan je vjetar iz smjera sjeveroistoka brzine iznosa $V = 40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Postupak: Neka je $\mathbf{v}'$, $v' = |\mathbf{v}'|$, brzina broda u odnosu na zrak, a $\mathbf{V}$, $V = |\mathbf{V}|$, neka je brzina zraka u odnosu na tlo. Brzina broda u odnosu na tlo može se napisati kao zbroj tih dviju brzina,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Odredimo li iznos te brzine, $v = |\mathbf{v}|$, trajanje putovanja biti će

$$t = d/v.$$

Kako bismo odredili v pišemo

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Jednakost kvadrata modula vektora s lijeve i s desne strane daje

$$v'^2 = v^2 - 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} + V^2.$$

Označimo li s θ kut što ga zatvaraju vektori $\mathbf{v}$ (smjer brzine broda u odnosu na tlo, dakle prema sjeveru) i vektor $\mathbf{V}$ (smjer gibanja zraka u odnosu na tlo, dakle prema jugoistoku) možemo pisati

$$v'^2 = v^2 - 2vV\cos\theta + V^2,$$

iz čega rješavanjem kvadratne jednadžbe slijedi

$$v_{1,2} = V\cos\theta \pm \sqrt{v'^2 - (V\sin\theta)^2} = v'\left(\beta\cos\theta \pm \sqrt{1 - (\beta\sin\theta)^2}\right),$$

gdje smo uveli oznaku

$$\beta = V/v'.$$

U našem slučaju $\theta = {}^{3\pi}\!/_{4}$, $\beta = 1/2$, pa vidimo da jedino rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena (v_1) ima pozitivnu vrijednost. Konačno, trajanje putovanja je

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{d}{v'}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1},$$

što za zadane vrijednosti daje $t \simeq 3.43\,\mathrm{h}$.

Rješenje: $t = (d/v')2\sqrt{2}/(\sqrt{7}-1) \simeq 3.43\,\mathrm{h}$

Zadatak 1.1.9: Veslač želi preći nabujalu rijeku tako da ga rijeka tokom prelaska što je moguće manje 'odnese' nizvodno. Odredi kut koji s okomicom na obalu mora zatvarati smjer u kojem tokom prelaska 'gleda' njegov čamac ako je iznos brzine rijeke u odnosu na obalu dva puta veći od brzine čamca u odnosu na vodu.

Postupak: Neka je $\mathbf{v}'$, $v = |\mathbf{v}'|$, brzina čamca u odnosu na vodu, a $\mathbf{V}$, $V = |\mathbf{V}|$ neka je brzina vode u odnosu na obalu. Smjer u kojem čamac 'gleda' podudara se sa smjerom njegova gibanja u odnosu na vodu. Označimo li s θ' kut što ga zatvaraju $\mathbf{v}'$ i $\mathbf{V}$, smjer u kojem čamac 'gleda' i okomica na obalu zatvaraju (traženi) kut

$$\alpha = \theta' - \pi/2$$

Brzinu čamca u odnosu na obalu možemo napisati kao

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}.$$

Rijeka će tim manje 'odnijeti' čamac nizvodno, čim je veći kut θ što ga zatvaraju vektor $\mathbf{V}$ (smjer toka rijeke) i vektor $\mathbf{v}$ (smjer gibanja čamca u odnosu na obalu). Koristeći definiciju skalarnog produkta kosinus kuta θ napisat ćemo kao

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}}{vV} = \frac{(\mathbf{v}'+\mathbf{V})\cdot\mathbf{V}}{|\mathbf{v}'+\mathbf{V}|V} = \frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V}+V^2}{(v'^2+2\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V}+V^2)^{1/2}V}.$$

Nadalje, pišući $\mathbf{v}'\cdot\mathbf{V} = v'V\cos\theta'$,

$$\cos\theta = \frac{v'V\cos\theta'+V^2}{(v'^2+2v'V\cos\theta'+V^2)^{1/2}V} = \frac{\cos\theta'+\beta}{(1+2\beta\cos\theta'+\beta^2)^{1/2}},$$

gdje je

$$\beta = V/v'.$$

Traženom maksimumu kuta θ odgovara minimum funkcije $\cos\theta$. Uz oznake $y = \cos\theta$ i $x = \cos\theta'$ problem se svodi na nalaženje minimuma funkcije

$$y[x] = \frac{x+\beta}{\sqrt{1+2\beta x+\beta^2}}$$

u intervalu $x \in (-1, 1)$. Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cdots = \frac{1+\beta x}{(1+2\beta x+\beta^2)^{3/2}},$$

koji je ispunjen za $x = -1/\beta$, odnosno za $\theta' = \arccos[-1/\beta]$. Slijedi da je traženi kut između smjera u kojem gleda čamac i okomice na obalu

$$\alpha = \arccos[-1/\beta] - \pi/2.$$

Ovdje je $\beta = 2$ te slijedi $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$.

Rješenje: $\alpha' = \pi/6$

Zadatak 1.1.10: Fenjer koji proizvodi tanak vodoravan snop svjetlosti visi na niti te se jednoliko okreće oko uspravne osi čineći 30 okretaja u minuti. Snop svjetlosti pada na ravan uspravan zid koji je od fenjera udaljen $D = 2\,\mathrm{m}$. Odredi brzinu svijetle mrlje na zidu u trenutku kada snop pada na zid pod kutem $\phi = 45^\circ$ u odnosu na okomicu.

Postupak: Tokom vrtnje fenjera svijetla se mrlja na zidu giba duž vodoravnog pravca koji uzimamo kao x-os. Ishodište $x = 0$ neka je točka pravca koja je najbliža fenjeru. Opišemo li orijentaciju fenjera kutom ϕ, pri čemu $\phi = 0$ odgovara orijentaciji frnjera pri kojoj snop svjetlosti pada okomito na zid (svijetla mrlja pri $x = 0$), onda se svijetla mrlja za općenit kut ϕ nalazi pri

$$x = D\,\tan\phi.$$

S obzirom da se fenjer vrti stalnom kutnom brzinom

$$\omega = 30 \times 2\pi\,\mathrm{rad\,min^{-1}} = \pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}},$$

kut možemo napisati kao $\phi = \omega t$, odnosno, položaj svijetle mrlje je

$$x = D\,\tan\omega t.$$

Brzina svijetle mrlje je

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{D\omega}{\cos^2\omega t}.$$

Za $\phi = 45^\circ$ imamo $\cos\omega t = \cos\phi = 2^{-1/2}$, odnosno

$$v = \frac{D\omega}{1/2} = 2D\omega,$$

što za zadane vrijednosti daje $v \simeq 12.57\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $v = 2D\omega \simeq 12.57\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

1.2 Dinamika

Zadatak 1.2.1: Sanduk smo vezali konopom i pokušavamo ga vući stalnom brzinom po vodoravnoj podlozi s kojom on ima koeficijent trenja μ. Odredi kut koji konop mora zatvarati s podlogom ako želimo da napetost konopa bude što je moguće manja.

Postupak: Na sanduk djeluju gravitacijska sila iznosa mg usmjerena prema dole, reakcija podloge iznosa N usmjerena prema gore, sila trenja iznosa μN usmjerena suprotno smjeru gibanja, te napetost konopa iznosa T. Kako bi se sanduk gibao stalnom brzinom te sile moraju biti u ravnoteži. Za vertikalnu komponentu imamo

$$\sum F_y = -mg + N + T \sin\alpha = 0$$

gdje je α kut koji konop zatvara s podlogom. Za horizontalnu komponentu imamo

$$\sum F_x = T\cos\alpha - \mu N = 0.$$

Eliminacijom N iz gornjeg sustava slijedi napetost konopa

$$T = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Minimum napetosti T u odnosu na kut α pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{\mu mg}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

koji je ispunjen za

$$\mu = \tan\alpha.$$

Rješenje: $\alpha = \arctan\mu$

Zadatak 1.2.2: Krenuvši iz mirovanja, sitno tijelo se spušta iz točke A prema točki B tako da prvi dio puta prevaljuje klizeći niz kosinu nagiba α, a ostatak puta prevaljuje klizeći po vodoravnoj polozi. Vodoravna udaljenost između točaka A i B veća je od visinske razlike među njima, a iznos brzine kojom tijelo klizi po vodoravnom dijelu puta jednak je iznosu brzine koju je tijelo imalo pri dnu kosine. Odredi nagib α tako da čitavo gibanje traje što je moguće kraće. Sile otpora smatramo zanemarivim.

Postupak: Neka je h visinska razlika između točaka A i B, a $d > h$ neka je vodoravna udaljenost među njima. Označimo li s b duljinu baze kosine tada je duljina puta koji tijelo prevaljuje klizeći niz kosinu

$$s_1 = \sqrt{h^2 + b^2},$$

dok je duljina vodoravnog dijela puta

$$s_2 = d - b.$$

Za vrijeme klizanja niz kosinu prisutna je akceleracija iznosa

$$a_1 = g \sin \alpha = gh/s_1,$$

gdje je α nagib kosine, a koristili smo $\sin \alpha = h/s_1$. S obzirom da tijelo kreće iz mirovanja trajanje klizanja niz kosinu je

$$t_1 = \sqrt{2s_1/a_1} = \sqrt{2(b^2 + h^2)/gh}.$$

Iznos brzine pri dnu kosine, a time i na vodoravnom dijelu putanje je

$$v_2 = a_1 t_1 = \sqrt{2gh},$$

te je trajanje gibanja po vodoravnom dijelu putanje

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{d - b}{\sqrt{2gh}}.$$

Ukupno trajanje putovanja je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(2\sqrt{b^2 + h^2} + (d - b) \right),$$

Ekstremalnu vrijednost gornjeg izraza pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} t = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2gh}} \left(\frac{2b}{\sqrt{b^2 + h^2}} - 1 \right),$$

koji je ispunjen za duljinu baze kosine

$$b = h/\sqrt{3}.$$

Da je riječ o minimumu potvrđuje druga derivacije vremena t po parametru b,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}b^2} t = \cdots = \sqrt{\frac{2}{g}} \left(\frac{h}{b^2 + h^2} \right)^{3/2},$$

koja je veća od nule za sve vrijednosti $b \geq 0$. Nadalje, s obzirom da dobivena duljina baze kraća od ukupne vodoravne udaljenosti, t.j. za dobivenu vrijednost vrijedi $b < h$ dok prema zadatku imamo $h < d$, smatramo ju rješenjem zadanog problema. Konačno, traženi kut nagiba kosine je

$$\alpha = \arctan \frac{h}{b} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Rješenje: $\alpha = \pi/3$

Zadatak 1.2.3: Tijelo se nalazi na kosini na udaljenosti $s = 2\,\mathrm{m}$ od njena podnožja i miruje. Polagano povećavajući nagib kosine dolazimo do nagiba $\alpha = 30^\circ$ pri kojem tijelo proklizne i nakon toga jednoliko ubrzano klizi niz kosinu. U podnožje kosine tijelo stiže $t = 3\,\mathrm{s}$ nakon što se pokrenulo. Odredi statički i dinamički koeficijent trenja tijela s kosinom. (Od trenutka kada se tijelo pokrenulo nagib kosine se više ne povećava. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Kad tijelo mase m miruje na kosini nagiba α sila statičkog trenja $F_{\mathrm{st.}}$ u ravnoteži je s projekcijom gravitacijske sile na kosinu. Jednakost iznosa tih sila glasi

$$F_{\mathrm{st.}} = mg\sin\alpha.$$

Najveći mogući iznos sile statičkog trenja jednak je umnošku koeficijenta statičkog trenja $\mu_{\mathrm{st.}}$ i sile pritiska N tijela i kosine čiji je iznos jednak iznosu projekcije gravitacijske sile na okomicu na kosinu. Pišemo

$$(F_{\mathrm{st.}})_{\mathrm{max}} = \mu_{\mathrm{st.}}N = \mu_{\mathrm{st.}}mg\cos\alpha.$$

Uvrštavanjem maksimalnog iznosa sile trenja u gornji uvjet ravnoteže slijedi da je najveći nagib kosine pri kojem tijelo može mirovati određen koeficijentom statičkog trenja,

$$(\tan\alpha)_{\mathrm{max}} = \mu_{\mathrm{st.}}.$$

Kad tijelo klizi niz kosinu na njega djeluje projekcija gravitacijske sile na smjer gibanja te sila dinamičkog trenja suprotnog smjera i iznosa jednakog umnošku koeficijenta $\mu_{\mathrm{din.}}$ i sile pritiska N. Akceleraciju tijela možemo napisati kao

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu_{\mathrm{din.}}mg\cos\alpha}{m} = g\,(\sin\alpha - \mu_{\mathrm{din.}}\cos\alpha).$$

Ako tijelo krenuvši iz mirovanja uz stalnu akceleraciju a prevaljuje put s u vremenu t vrijedi $s = (a/2)t^2$. Koristeći gornji izraz za akceleraciju slijedi

$$\mu_{\mathrm{din.}} = \frac{1}{\cos\alpha}\left(\sin\alpha - \frac{2s}{gt^2}\right) = \tan\alpha - \frac{2s}{gt^2\cos\alpha}.$$

Za zadanu vrijednost nagiba α pri kojoj je uvjet ravnoteže granično ispunjen (statičko trenje), ali tijelo može i kliziti niz kosinu (dinamičko trenje), imamo $\mu_{\mathrm{st.}} \simeq 0.577$, $\mu_{\mathrm{din.}} = 0.525$.

Rješenje: $\mu_{\mathrm{st.}} = \tan\alpha \simeq 0.577$, $\mu_{\mathrm{din.}} = \tan\alpha - 2s/(gt^2\cos\alpha) \simeq 0.525$

Zadatak 1.2.4: Krenuvši iz mirovanja te klizeći niz kosinu nagiba α uz koeficijent trenja μ tijelo prevaljuje vodoravnu udaljenost b. Odredi visinu kosine h za koju će trajanje tog klizanja biti najkraće.

Postupak: Uvijek je moguće odabrati dovoljno malenu visinu h (odn. nagib kosine α) tako da tijelo ili ne krene u klizanje, ili da njegovo ubrzanje bude toliko maleno da klizanje proizvoljno dugo traje. S druge strane, odaberemo li dovoljno veliku visinu h (odn. $\alpha \to \pi/2$) gibanje će sve više nalikovati slobodnom padu i njegovo trajanje će biti razmjerno s korijenom iz visine, što također teži u beskonačno. Očigledno je da negdje između ovih krajnjih slučajeva postoji traženi minimum. Duljina puta koji tijelo prelazi kližući niz kosinu je

$$s = \sqrt{b^2 + h^2},$$

a akceleracija tijela je

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Iz geometrije imamo odnos

$$h = b\tan\alpha,$$

te koristeći opće identitete $\sin\alpha = \tan\alpha(1 + \tan^2\alpha)^{-1/2}$ i $\cos\alpha = (1 + \tan^2\alpha)^{-1/2}$, trajanje klizanja niz kosinu možemo napisati kao

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \cdots = \sqrt{\frac{2b(1 + u^2)}{g(u - \mu)}}, \qquad u = \tan\alpha.$$

Ekstrem gornjeg izraza pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} t = \cdots = \frac{b}{gt} \frac{u^2 - 2u\mu - 1}{(u - \mu)^2}$$

koji je ispunjen za

$$u_{1,2} = \mu \pm \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Rješenje s negativnim predznakom (u_2) manje je od nule te ga ovdje odbacujemo, a kao rješenje odabiremo ono s pozitivnim predznakom za koje vrijedi $u_1 \geq 1$. Njemu odgovara tražena visina

$$h = bu_1 = b\left(\mu + \sqrt{1 + \mu^2}\right).$$

Rješenje: $h = b\left(\mu + (1 + \mu^2)^{1/2}\right)$

Zadatak 1.2.5: Tijelo se nalazi pri dnu kosine nagiba $\alpha = 30^\circ$ s kojom ima koeficijent dinamičkog trenja $\mu_{\text{din.}} = 0.2$. Pokrenemo li tijelo u gibanje (klizanje) uz kosinu početnom brzinom iznosa $v_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ono će se nakon nekog vremena zaustaviti, a nakon toga će početi kliziti unazad. Odredi nakon koliko vremena će se tijelo vratiti u polaznu točku. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Koordinatni sustav postavljamo tako da je x-os paralelna kosini i usmjerena je niz nju, a ishodište se nalazi u točki u kojoj u trenutku $t = t_0$ počinje gibanje. x-komponenta akceleracije tijela dana je poznatim izrazima

$$a_\pm = g(\sin\alpha \pm \mu_{\text{din.}} \cos\alpha),$$

gdje gornji predznak $(+)$ odgovara klizanju tijela uz kosinu, a donji predznak $(-)$ odgovara klizanju niz kosinu. x-komponentu brzine i x-koordinatu položaja tijela za vrijeme klizanja tijela uz kosinu možemo napisati kao

$$v[t] = v[t_0] + a_+(t - t_0), \qquad x[t] = x[t_0] + v[t_0](t - t_0) + \frac{a_+}{2}(t - t_0)^2,$$

gdje je $v[t_0] = -v_0$ i $x[t_0] = 0$. Trenutak $t = t_1$ u kojem se tijelo zaustavlja slijedi iz uvjeta $v[t_1] = 0$,

$$t_1 = t_0 + \frac{v_0}{a_+},$$

te za položaj tijela u tom trenutku imamo

$$x[t_1] = -\frac{v_0^2}{2a_+}.$$

Za vrijeme klizanja tijela niz kosinu imamo

$$x[t] = x[t_1] + v[t_1](t - t_1) + \frac{a_-}{2}(t - t_1)^2 = -\frac{v_0^2}{2a_+} + \frac{a_-}{2}(t - t_1)^2.$$

Trenutak $t = t_2$ u kojem se tijelo nalazi u početnom položaju slijedi iz uvjeta $x[t_2] = 0$,

$$t_2 = t_1 + \frac{v_0}{\sqrt{a_+ a_-}}.$$

Konačno, ukupno trajanje uspinjanja i silaska je

$$t_2 - t_0 = \frac{v_0}{a_+} + \frac{v_0}{\sqrt{a_+ a_-}} = \frac{v_0}{a_+}\left(1 + \sqrt{\frac{a_+}{a_-}}\right).$$

Za zadane vrijednosti $t_2 - t_0 \simeq 1.844\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $t = (v_0/a_+)(1 + \sqrt{a_+/a_-})$, $a_\pm = g(\sin\alpha \pm \mu_{\text{din.}} \cos\alpha)$, $t \simeq 1.844\,\mathrm{s}$.

Zadatak 1.2.6: Svemirski brod mase $m = 10\,\mathrm{t}$ na koji ne djeluju sile giba se duž pravca brzinom stalnog iznosa $v = 1\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Skretanje broda bez promjene iznosa brzine ostvaruje se uključivanjem bočnog motora koji na brod djeluje silom stalnog iznosa $F = 10\,\mathrm{kN}$ i smjera koji je u svakom trenutku okomit na putanju broda. Po isključenju motora brod se nastavlja gibati duž (novog) pravca. Koliko dugo mora biti uključen motor kako bi brod skrenuo za kut $\Delta\phi = 60°$?

Postupak: Motor djeluje silom okomitom na smjer putanje što znači da ta sila ima ulogu centripetalne sila. Označavamo

$$F = F_{\mathrm{cp}}.$$

S obzirom da je ovdje centripetalna sila stalnog iznosa, te pretpostavljajući da se gibanje odvija u ravnini, putanja broda je segment kružnice. Pravac početnog (konačnog) gibanja broda tangenta je na kružnicu u točki u kojoj se motor uključuje (isključuje). Kut koji odgovara segmentu kružnice jednak je kutu što ga zatvaraju pravac početnog i pravac konačnog gibanja broda. Masa broda m, iznos brzine v, kutna brzina gibanja po kružnici

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t},$$

polumjer kružnice R, te iznos centripetalne sile, povezani su poznatom relacijom

$$F_{\mathrm{cp}} = m\omega^2 R = \frac{mv^2}{R}.$$

Slijedi

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv},$$

odnosno

$$\Delta\phi = \int_0^{\Delta t} \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv}\,\mathrm{d}t = \frac{F_{\mathrm{cp}}}{mv}\,\Delta t.$$

Traženo vrijeme je

$$\Delta t = \frac{mv}{F_{\mathrm{cp}}}\,\Delta\phi.$$

Za zadane vrijednosti $\Delta t \simeq 17.45\,\mathrm{min}$.

Rješenje: $\Delta t = mv\Delta\phi/F_{\mathrm{cp}} \simeq 17.45\,\mathrm{min}$

Zadatak 1.2.7: Automobil se kreće brzinom stalnog iznosa po vodoravnoj podlozi kružnom putanjom, a za sobom povlači sanduk koji je za njega privezan nerastezljivim užetom duljine jednake polumjeru putanje automobila. Odredi polumjer kružnice duž koje se giba sanduk ako je iznos brzine automobila $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, polumjer putanje automobila $R = 50\,\mathrm{m}$, a sanduk s podlogom ima koeficijent trenja $\mu = 0.3$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Pretpostavljamo da se sanduk giba duž kružnice polumjera R' kutnom brzinom koja je jednaka kutnoj brzini automobila,

$$\omega = v/R,$$

a pod djelovanjem sile trenja iznosa $F_{\mathrm{tr.}} = \mu m g$ i napetosti užeta iznosa T. Tangencijalna komponenta zbroja sila na sanduk mora biti jednaka nuli, dok radijalna komponenta zbroja sila mora biti jednaka centripetalnoj sili,

$$F_{\mathrm{tang.}} = T\sin\alpha - \mu m g = 0, \qquad F_{\mathrm{rad.}} = T\cos\alpha = F_{\mathrm{CP}} = m\omega^2 R', \tag{1}$$

gdje je α kut koji zatvaraju uže i pravac sanduk–središte. Iz razmatranja geometrije jednakokračnog trokuta čiji su vrhovi središte kružnice, položaj automobila i položaj sanduka imamo

$$R' = 2R\cos\alpha. \tag{2}$$

Eliminacijom T iz sustava (1) te korištenjem (2) slijedi

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-(R'/2R)^2}}{R'/2R},$$

odnosno,

$$R' = 2R\sqrt{1-\left(\frac{\mu g}{2\omega^2 R}\right)^2} = 2R\sqrt{1-\left(\frac{\mu g R}{2v^2}\right)^2}.$$

Za zadane vrijednosti

$$R' \simeq 68\,\mathrm{m}.$$

Rješenje: $R' = 2R\sqrt{1-(\mu g R/2v^2)^2} \simeq 68\,\mathrm{m}$

Zadatak 1.2.8: Tanki homogeni štap duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ vrti se kutnom brzinom $\omega = 10\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ oko osi koja prolazi njegovim polovištem i okomita je na njega. Odredi napetost štapa u njegovom polovištu.

Postupak: Napetost štapa u njegovu polovištu prisutna je kako bi osigurala potrebnu centripetalnu silu za kružno gibanje obaju polovica štapa. Izračunat ćemo potrebnu centripetalnu silu. Element mase štapa možemo napisati kao

$$\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}r,$$

gdje je

$$\mu = m/\ell$$

linijska gustoća mase štapa, a $\mathrm{d}r$ je element duljine štapa. Kako bi se element mase štapa $\mathrm{d}m$ gibao po kružnici polumjera r kutnom brzinom ω na njega mora djelovati centripetalna sila iznosa

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{cp}} = a_{\mathrm{cp}}\mathrm{d}m = \omega^2 r\,\mathrm{d}m.$$

Štap ćemo zamisliti kao niz elemenata mase $\mathrm{d}m$ te ćemo integracijom izračunati ukupnu centripetalnu na jednu polovicu štapa,

$$F_{\mathrm{cp}} = \int \mathrm{d}F_{\mathrm{cp}} = \int \omega^2 r\,\mathrm{d}m = \int_{r=0}^{\ell/2} \omega^2 r\,\mu\,\mathrm{d}r = \left.\frac{\mu\omega^2 r^2}{2}\right|_0^{\ell/2} = \frac{\mu\omega^2\ell^2}{8} = \frac{m\omega^2\ell}{8}.$$

Centripetalna sila koju smo izračunali odgovara napetosti štapa u njegovu polovištu. Za zadane vrijednosti $T = F_{\mathrm{cp}} \simeq 1234\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $T = m\omega^2\ell/8 \simeq 1234\,\mathrm{N}$

Zadatak 1.2.9: n sitnih tijela ukupne mase M povezano je s pomoću n bezmasenih nerastezljivih niti jednake duljine tako da tijela i niti čine pravilni n-terokut s polumjerom opisane kružnice R. Kad se taj n-terokut vrti oko osi koja je okomita na ravninu n-terokuta i prolazi njegovim središtem, napetosti niti tijelima osiguravaju potrebnu centripetalnu silu. Odredi napetost niti ako se n-terokut vrti kutnom brzinom ω te pronađi limes tog izraza kad n teži u beskonačno. (Traženi limes opisuje napetost tankog obruča mase M i polumjera R pri vrtnji kutnom brzinom ω.)

Postupak: Kako bi se tijelo mase $m = M/n$ vrtjelo kutnom brzinom ω putanjom polumjera zakrivljenosti R na njega mora djelovati centripetalna sila iznosa

$$F_{\text{cp.}} = m\omega^2 R = M\omega^2 R/n.$$

Tu silu osiguravaju dvije napete niti koje, svaka sa svoje strane, s tangentom na kružnicu zatvaraju kut $\alpha = \pi/n$. Slijedi da iznos zbroja projekcija dvaju sila u smjeru središta n-terokuta možemo napisati kao

$$F_{\text{cp}} = 2T_n \sin[\pi/n],$$

gdje je T_n napetost niti. Slijedi

$$T_n = \frac{M\omega^2 R}{2n\sin[\pi/n]}.$$

Kad n teži u beskonačno imamo

$$T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{M\omega^2 R}{2n\sin[\pi/n]} = \frac{M\omega^2 R}{2\pi}.$$

Rješenje: $T_n = M\omega^2 R/2n\sin[\pi/n]$, $T_\infty = \lim_{n\to\infty} T_n = M\omega^2 R/2\pi$

Zadatak 1.2.10: Sitno tijelo obješeno je s pomoću tanke nerastezljive niti duljine ℓ o čvrsto uporište i giba se opisujući kružnicu polumjera $r < \ell$ u vodoravnoj ravnini (tzv. stožasto njihalo). Odredi frekvenciju vrtnje te njen limes za $r/\ell \to 0$.

Postupak: Na tijelo djeluju gravitacijska sila iznosa mg i napetost niti iznosa T koje zajedno daju centripetalnu silu iznosa $m\omega^2 r$, gdje je ω kutna brzina, a r je polumjer putanje. S obzirom da tijelo ne akcelerira u uspravnom smjeru projekcija ukupne sile na uspravni pravac jednaka je nuli,

$$T\cos\phi - mg = 0,$$

dok je projekcija ukupne sile na vodoravnu ravninu po iznosu jednaka centripetalnoj sili,

$$T\sin\phi = m\omega^2 r,$$

gdje je ϕ kut koji nit zatvara s uspravnim pravcem. Eliminacijom T iz gornjih jednadžbi slijedi

$$\tan\phi = \frac{\omega^2 r}{g},$$

a s obzirom da iz geometrije imamo

$$\tan\phi = \frac{r}{\sqrt{\ell^2 - r^2}},$$

slijedi

$$\omega^2 = \frac{g}{\sqrt{\ell^2 - r^2}} = \frac{g}{\ell}\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/2}.$$

Za $r/\ell \to 0$ imamo

$$\lim_{r/\ell\to 0} \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Rješenje: $\omega = \sqrt{g/\ell}\left(1 - (r/\ell)^2\right)^{-1/4}$, $\lim_{r/\ell\to 0}\omega = \sqrt{g/\ell}$

Zadatak 1.2.11: Vodoravna platforma može se okretati oko vertikalne osi. Kut koji opisuje njen položaj u vremenu dan je izrazom

$$\phi[t] = \phi_0 \cos \Omega t,$$

gdje je $\phi_0 > 0$ amplituda (maksimalni kutni otklon od središnjeg položaja), a Ω je frekvencija titranja. Odredi minimalnu vrijednost koeficijenta trenja između platforme i tijela koje se nalazi na platformi na udaljenosti R od osi vrtnje ako želimo da tijelo ne proklizuje pri gibanju platforme.

Postupak: Sila koja osigurava gibanje tijela zajedno s akcelerirajućom podlogom je sila statičkog trenja čiji je maksimalni iznos $(F_{\mathrm{tr.}})_{\max} = \mu N = \mu m g$. Tijelo će proklizati po podlozi koja akcelerira s akceleracijom iznosa a ako maksimalan iznos sile trenja nije dovoljan da osigura tijelu istu takvu akceleraciju. Uvjet $ma \le (F_{\mathrm{tr.}})_{\max}$ vodi na

$$\mu \ge a/g.$$

Akceleraciju podloge u točki u kojoj se nalazi tijelo računamo kao akceleraciju točke koja se giba po kružnici polumjera R pri čemu je kutna koordinata ϕ opisana zadanim izrazom. Iznos centripetalne i tangencijalne komponente akceleracije dani su poznatim izrazima

$$a_{\mathrm{cp.}} = \omega^2 R, \qquad a_{\mathrm{tang.}} = |\alpha| R,$$

gdje su

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\phi_0 \Omega \sin \Omega t, \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\phi_0 \Omega^2 \cos \Omega t,$$

kutna brzina i kutna akceleracija. S obzirom da su centripetalna i tangencijalna akceleracija međusobno okomite, kvadrat iznosa akceleracije možemo napisati kao

$$a^2 = a_{\mathrm{cp.}}^2 + a_{\mathrm{tang.}}^2 = R^2 \Omega^4 \phi_0^2 (\cos^2 \Omega t + \phi_0^2 \sin^4 \Omega t).$$

Ekstreme kvadrata iznosa akceleracije pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}t} = \cdots = -R^2 \phi_0^2 \Omega^5 \big(1 - \phi_0^2 + \phi_0^2 \cos 2\Omega t\big) \sin 2\Omega t$$

koji je ispunjen u dva slučaja. Prvi slučaj nastupa pri $\sin 2\Omega t = 0$ i na $\Omega t = 0, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm 3\pi/2, \ldots$, što naizmjence odgovara trenucima u kojima platforma prolazi središnjim položajem (tangencijalna akceleracija iščezava, a centripetalna komponenta je u svom maksimumu) te trenucima u kojima platforma miruje pri maksimalnom otklonu (centripetalna akceleracija iščezava, tangencijalna je maksimalna). To daje dvije ekstremalne vrijednosti iznosa akceleracije:

$$a_1 = (a_{\mathrm{cp.}})_{\max} = R \Omega^2 \phi_0^2, \qquad a_2 = (a_{\mathrm{tang.}})_{\max} = R \Omega^2 \phi_0.$$

Uočavamo da za $0 < \phi_0 < 1$ vrijedi $a_2 > a_1$, dok za $\phi_0 > 1$ vrijedi obrnuto. Drugi slučaj nastupa pri $\cos 2\Omega t = 1 - \phi_0^{-2}$. Koristeći $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ dobivamo treću ekstremalnu vrijednost iznosa akceleracije,

$$a_3 = R \Omega^2 (\phi_0^2 - 1/4)^{1/2},$$

koja je prisutna jedino za $\phi_0 > 1/2$, a s obzirom da vrijedi $a_3 < a_2$, ona ne može predstavljati apsolutni maksimum. Konačno, koeficijent trenja potreban da tijelo "izdrži" akceleraciju podloge određen je njenim maksimumima a_1 i a_2,

$$\mu \ge \frac{a_{\max}}{g} = \begin{cases} a_2/g = (a_{\mathrm{tang.}})_{\max}/g = R\Omega^2 \phi_0/g & \text{za} \quad 0 < \phi_0 \le 1 \\ a_1/g = (a_{\mathrm{cp.}})_{\max}/g = R\Omega^2 \phi_0^2/g & \text{za} \quad \phi_0 > 1 \end{cases}$$

Rješenje: $\mu \ge R\Omega^2 \phi_0/g$ za $0 < \phi_0 \le 1$, $\mu \ge R\Omega^2 \phi_0^2/g$ za $\phi_0 > 1$

Zadatak 1.2.12: Bilijarska kugla nalijeće na mirnu bilijarsku kuglu jednake mase. Ako se prva kugla odbije pod kutom θ_1 u odnosu na smjer svog gibanja prije sudara, odredi kut koji zatvara smjer gibanja druge kugle nakon sudara sa smjerom gibanja prve kugle prije sudara. Sudar smatramo savršeno elastičnim.

Postupak: Sudar promatramo u sustavu u kojem druga kugla miruje prije sudara. U svakom sudaru očuvana je količina gibanja pa imamo

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v}_1' + m\mathbf{v}_2',$$

a u savršeno elastičnom sudaru očuvana je i kinetička energija

$$E_{\text{kin.}} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m{v_1'}^2}{2} + \frac{m{v_1'}^2}{2}$$

(veličine označene s $'$ odnose se na stanje nakon sudara.) Gornji izrazi čine sustav

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2', \qquad v_1^2 = {v_1'}^2 + {v_2'}^2.$$

Kvadriranjem prve jednadžbe dobivamo

$$v_1^2 = {v_1'}^2 + 2\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' + {v_2'}^2,$$

te oduzimanjem druge jednadžbe slijedi

$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0,$$

što znači da su brzine $\mathbf{v}_1'$ i $\mathbf{v}_2'$ međusobno okomite, odnosno, ako $\mathbf{v}_1'$ s $\mathbf{v}_1$ zatvara kut θ_1, onda $\mathbf{v}_2'$ s $\mathbf{v}_1$ zatvara kut

$$\theta_2 = {}^{\pi}\!/_{2} - \theta_1.$$

Može se razmotriti i slučaj u kojem je uvjet $\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = 0$ ispunjen time što je jedna od brzina nakon sudara jednaka nuli. Ako $\mathbf{v}_1' = 0$, onda $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1$, što odgovara čeonom savršeno elastičnom sudaru čestica jednakih masa, te kut θ_1 nije dobro definiran. Ako $\mathbf{v}_2' = 0$, onda $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1$, dakle sudar se "nije dogodio," te kut θ_2 nije dobro definiran.

Rješenje: $\theta_2 = {}^{\pi}\!/_{2} - \theta_1$

Zadatak 1.2.13: Tijelo mase $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ brzinom iznosa $v_1 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ udara u mirno tijelo mase $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$ te se od njega odbija unazad brzinom iznosa v_1'. U sudaru se oslobađa toplina u iznosu od $20\,\mathrm{J}$. Odredi iznos brzine v_1'.

Postupak: Oslobođena toplina odgovara gubitku kinetičke energije u sustavu. Koristeći opću relaciju

$$K - K' = (1-k^2)\frac{m_1 m_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2}{2(m_1+m_2)}$$

računamo koeficijent restitucije,

$$k^2 = 1 - \frac{2(K-K')(m_1+m_2)}{m_1 m_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2} = 1 - \frac{2(K-K')(m_1+m_2)}{m_1 m_2 v_1^2}.$$

brzinu $\mathbf{v}_1'$ računamo iz opće relacije za čeoni sudar

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} - k\frac{m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)}{m_1+m_2}.$$

Slijedi

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1+m_2} - k\frac{m_2\mathbf{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1 - k m_2}{m_1+m_2}\,\mathbf{v}_1.$$

Za zadane vrijednosti

$$k^2 = 0.5, \qquad \mathbf{v}_1' \simeq -0.366\,\mathbf{v}_1, \qquad v_1' = |\mathbf{v}_1'| \simeq 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $k^2 = 1 - 2(K-K')(m_1+m_2)/(m_1 m_2 v_1^2) = 0.5$,
$v_1' = |m_1 - k m_2| v_1/(m_1+m_2) \simeq 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Zadatak 1.2.14: Dva tijela čije su mase m_1 i m_2 mogu slobodno (bez trenja) klizati duž vodoravne tračnice. Ako se tijelo m_1 savršeno elastično sudari s tijelom mase m_2 koje je do tada mirovalo, tijela se nakon sudara gibaju u suprotnim smjerovima brzinama jednakih iznosa. Odredi omjer masa $q = m_1/m_2$.

Postupak: U savršeno elastičnom čeonom sudaru u referentnom sustavu središta mase vrijedi

$$\mathbf{v}_{1,2}^{*}{}' = -\mathbf{v}_{1,2}^{*}.$$

Prelaskom u laboratorijski sustav gornja relacija glasi

$$\mathbf{v}_{1,2}{}' - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = -(\mathbf{v}_{1,2} - \mathbf{v}_{\mathrm{cm}}),$$

odnosno

$$\mathbf{v}_{1,2}' = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} - \mathbf{v}_{1,2},$$

gdje je $\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}$ brzina središta mase. Ovdje imamo

$$\mathbf{v}_1' = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} - \mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{v}_2' = 2\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = -\mathbf{v}_1'.$$

Eliminacijom $\mathbf{v}_{1,2}'$ slijedi

$$\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}.$$

Koristeći

$$\mathbf{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2}$$

slijedi

$$q = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}.$$

Rješenje: $q = 1/3$

Zadatak 1.2.15: Raketni motor ubrzava raketu time što u suprotnom smjeru izbacuje plin brzinom iznosa v u odnosu na raketu. Masa rakete umanjuje se za masu izbačenog plina. Ako je raketa krenula iz mirovanja, odredi brzinu koju će imati u trenutku u kojem će njena masa iznositi jednu trećinu početne mase.

Postupak: Promjena količine gibanja plina mora biti suprotna promjeni količine gibanja rakete (Newtonovi zakoni). Promjenu količine gibanja mase koja pri izbacivanju plina mase Δm ostaje u raketi možemo napisati kao

$$\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{raketa}} = (M - \Delta m)(\mathbf{V} + \Delta \mathbf{V}) - (M - \Delta m)\mathbf{V} \simeq M\,\Delta \mathbf{V},$$

gdje je M masa rakete, $\mathbf{V}$ je brzine rakete, a zanemarili smo član $\Delta m\,\Delta \mathbf{V}$. Tome odgovara promjena količine gibanja izbačenog plina

$$\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{plin}} = \Delta m\,(\mathbf{V} + \mathbf{v}) - \Delta m\,\mathbf{V} = \Delta m\,\mathbf{v},$$

gdje je $\mathbf{v}$ relativna brzina izbacivanja plina. S obzirom da mora biti $\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{raketa}} = -\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{plin}}$ slijedi

$$M\,\Delta \mathbf{V} = -\Delta m\,\mathbf{v}.$$

Također moramo uvažiti da izbacivanje plina smanjuje masu rakete pa pišemo

$$\Delta m = -\Delta M.$$

Pišući u diferencijalnom obliku, ograničavajući razmatranje isključivo na pravac duž kojeg se raketa giba, te uz separaciju varijabli dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

koju ćemo integrirati od početnog (0) do konačnog (1) stanja. Slijedi

$$V_{1x} = V_{0x} + v_x \ln\left[\frac{M_1}{M_0}\right].$$

U našem slučaju $V_{0x} = 0$, $M_0/M_1 = 3$, te slijedi $V_{1x} = -v_x \ln 3$

Rješenje: $V = v \ln 3$

Zadatak 1.2.16: Laboratorijska vaga je baždarena tako da pokazuje $0\,\mathrm{g}$ kada se na njoj nalazi prazna epruveta. U nekom trenutku epruvetu počinjemo puniti štrcaljkom koja odozgo jednolikim mlazom ubrizgava $\Delta m = 5\,\mathrm{g}$ vode u $\Delta t = 3\,\mathrm{s}$. Brzina vode u mlazu je $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Odredi vrijednost mase koju vaga pokazuje jednu sekundu nakon što je počelo punjenje epruvete. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Tokom punjenja epruvete vaga pokazuje zbroj mase vode koja se u tom trenutku nalazi u epruveti i mase čija bi težina bila jednaka sili kojom vaga zaustavlja vodu koja brzinom iznosa v ulazi u epruvetu. Ako je punjenje epruvete počelo u trenutku $t = 0$ onda je masa vode u epruveti

$$m[t] = \mu t,$$

gdje je

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

maseni tok vode u mlazu (brzina punjenja). Iznos promjene količine gibanja elementa vode mase $\mathrm{d}m$ koji se gibao brzinom iznosa v, a zatim se zaustavio, je

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}m\, v.$$

Prema Newtonovom zakonu tome odgovara sila

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\, v}{\mathrm{d}t} = \mu v.$$

Slijedi da tokom punjenja epruvete vaga prikazuje masu

$$m'[t] = m[t] + \frac{F}{g} = \mu t + \frac{\mu v}{g} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\left(t + \frac{v}{g}\right).$$

U trenutku $t = 1\,\mathrm{s}$ vaga pokazuje $m' \simeq 3.366\,\mathrm{g}$.

Rješenje: $m'[t] = (\Delta m/\Delta t)(t + v/g) \simeq 3.366\,\mathrm{g}$

1.3 Rad i energija

Zadatak 1.3.1: Kako bi se automobil kretao vodoravnom cestom brzinom iznosa $v_0 = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ njegov motor mora raditi snagom $P_0 = 5\,\mathrm{kW}$. Pretpostavljajući da je sila otpora razmjerna kvadratu brzine automobila, odredi najveću brzinu koju automobil može postići na vodoravnoj cesti ako je najveća snaga njegovog motora $P_{\max} = 50\,\mathrm{kW}$.

Postupak: Snaga je jednaka umnošku iznosa brzine tijela i komponente sile u smjeru gibanja. Na vodoravnoj cesti pri brzini v_0 imamo

$$P_0 = F_0 v_0,$$

dok je prema pretpostavci zadatka

$$F_0 = k v_0^2.$$

Pri maksimalnoj snazi motora imamo

$$P_{\max} = F_{\max} v_{\max}, \qquad F_{\max} = k v_{\max}^2.$$

Eliminacijom k, F_0 i $F_{\max}$ iz gornjeg sustava jednadžbi slijedi

$$v_{\max} = v_0 \left(\frac{P_{\max}}{P_0} \right)^{1/3}.$$

Za zadane vrijednosti $v_{\max} \simeq 129.3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

Rješenje: $v_{\max} = v_0 (P_{\max}/P_0)^{1/3} \simeq 129.3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

Zadatak 1.3.2: Sitno tijelo mase $m = 1\,\mathrm{kg}$ obješeno je s pomoću tanke bezmasene niti o čvrsto uporište, otklonjeno je iz ravnotežnog položaja tako da nit zatvara kut $\alpha_0 = 45^\circ$ s uspravnim pravcem, te je pušteno u gibanje iz mirovanja (njihanje). Odredi napetost niti u trenutku u kojem tijelo prolazi ravnotežnim položajem. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: U trenutku kada tijelo prolazi ravnotežnim položajem ono se giba kružnom putanjom polumjera ℓ brzinom iznosa v_0 pri čemu na njega napetost niti iznosa T usmjerena prema središtu zakrivljenosti putanje te gravitacijska sila iznosa mg suprotnog smjera. Zbroj tih dviju sila mora po iznosu biti jednak potrebnoj centripetalnoj sili,

$$F_{\mathrm{cp}} = \frac{mv_0^2}{\ell} = T - mg,$$

odnosno

$$T = m\left(\frac{v_0^2}{\ell} + g\right).$$

Brzinu v_0 odredit ćemo na osnovu očuvanja mehaničke energije,

$$E = U + K = mgh + \frac{mv_0^2}{2} = mg\ell(1 - \cos\alpha) + \frac{mv_0^2}{2}.$$

gdje je $h = \ell(1 - \cos\alpha)$ visina tijela u odnosu na ravnotežni položaj pri otklonu α. Pri maksimalnom otklonu $v = 0$ pa imamo

$$E = mg\ell(1 - \cos\alpha_0),$$

dok u ravnotežnom položaju $h = 0$ pa imamo

$$E = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Izjednačavanjem gornjih energija slijedi

$$v_0^2 = 2g\ell(1 - \cos\alpha_0).$$

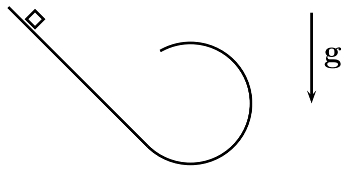
Konačno,

$$T = mg(3 - 2\cos\alpha_0).$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 15.56\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $T = mg(3 - 2\cos\alpha_0) \simeq 15.56\,\mathrm{N}$

Zadatak 1.3.3: Sitno tijelo klizi bez trenja niz kosinu koja u svom podnožju prelazi u kružnu petlju polumjera zakrivljenosti R. Po ulasku u petlju tijelo nastavlja kliziti po njenoj unutrašnjoj strani. Odredi najmanju visinu u odnosu na najnižu točku petlje s koje valja pustiti tijelo da klizi niz kosinu želimo li da pri prolasku kroz najvišu točku petlje ono ne izgubi kontakt s podlogom (stropom).



Postupak: Ako tijelo pri prolasku kroz najvišu točku petlje ne gubi kontakt s podlogom ono se giba kružnom putanjom te zbroj reakcije podloge i gravitacijske sila koja djeluje na tijelo (obje sile okomite na putanju) mora biti po iznosu biti jednak potrebnoj centripetalnoj sili,

$$F_{\text{cp}} = \frac{mv^2}{R} = N + mg,$$

gdje je v brzina kojom se tijelo giba. Pustimo li tijelo u gibanje s visine H u odnosu na najnižu točku petlje, njegovu brzinu pri visini $h < H$ možemo odrediti na osnovu očuvanja mehaničke energije energije,

$$E = U + K = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgH,$$

iz čega slijedi

$$v^2 = 2g(H - h),$$

odnosno u najvišoj točki petlje gdje je $h = 2R$,

$$v^2 = 2g(H - 2R).$$

Iznos sile reakcije podloge u toj točki slijedi kao

$$N = \frac{2mg(H - 2R)}{R} - mg = \frac{mg}{R}(2H - 5R).$$

Nas zanima granični slučaj u kojem reakcija podloge iščezava. Slijedi

$$H_{\text{min}} = \frac{5R}{2}.$$

Rješenje: $H_{\text{min}} = 5R/2$.

Zadatak 1.3.4: Tijelo miruje na vodoravnoj podlozi po kojoj može klizati bez trenja, a vodoravnom oprugom konstante $k = 50\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ je povezano s čvrstim uporištem. U nekom trenutku na tijelo počne djelovati vodoravna sila stalnog iznosa $F_0 = 3\,\mathrm{N}$ usmjerena tako da rasteže oprugu. Odredi maksimalnu kinetičku energiju koju će tijelo postići prije nego što se zaustavi.

Postupak: Neka se ishodište x-osi podudara s početnim položajem tijela, a njen smjer sa smjerom u kojem se tijelo počinje gibati (smjerom rastezanja opruge). Ukupnu silu koja djeluje na tijelo pri položaju x možemo napisati kao

$$F[x] = F_0 - kx.$$

Radi se o konzervativnoj sili kojoj odgovara potencijalna energija

$$E_{\mathrm{pot.}}[x] = -\int_0^x F[x']\,\mathrm{d}x' = -F_0 x + \frac{1}{2}\,kx^2.$$

Ukupna energija je očuvana veličina čiju vrijednost određujemo na osnovu početnih uvjeta $x[t_0] = 0$ i $v_x[t_0] = 0$,

$$E = E_{\mathrm{kin.}} + E_{\mathrm{pot.}} = \frac{1}{2}mv_x^2 - F_0 x + \frac{1}{2}\,kx^2 = 0.$$

Kinetička energija postiže svoj maksimum pri položaju pri kojem potencijalna energija ima minimum,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E_{\mathrm{pot.}}[x] = -F_0 + kx,$$

koji je ispunjen kada se tijelo nalazi pri položaju

$$x = \frac{F_0}{k}.$$

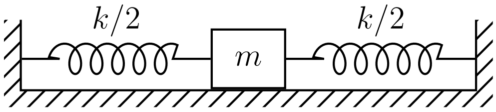
Kinetička energija pri tom položaju je

$$E_{\mathrm{kin.}} = -E_{\mathrm{pot.}} = F_0\frac{F_0}{k} - \frac{1}{2}\,k\left(\frac{F_0}{k}\right)^2 = \frac{F_0^2}{2k}.$$

Za zadane vrijednosti $E_{\mathrm{kin.}} = 0.09\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $E_{\mathrm{kin.}} = F_0^2/2k = 0.09\,\mathrm{J}$

Zadatak 1.3.5: Tijelo mase m leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ i dvjema je oprugama čije su konstante $k/2$ pričvršćeno za uporišta (vidi sliku). Tijelo puštamo u gibanje iz mirovanja s neke udaljenosti od središnjeg položaja. Odredi najveću dopuštenu udaljenost želimo li da tijelo, nakon što se prvi puta zaustavi, ostane mirovati.



Postupak: Neka se gibanje tijela odvija duž x-osi gdje $x = 0$ odgovara središnjem položaju sustava (opruge djeluju silama jednakog iznosa). Silu kojom opruge djeluju na tijelo te potencijalnu energiju opruga možemo napisati kao

$$F_{\text{opr}}[x] = -kx, \qquad U[x] = \frac{1}{2}kx^2.$$

Kako bi tijelo koje miruje pri $x = x_0$ krenulo u gibanje, sila kojom na njega djeluju opruge mora biti po iznosu veća od najvećeg mogućeg iznosa sile trenja. Koristeći izraz za silu opruga te $F_{\text{tr}} = \mu mg$ slijedi $k|x_0| > \mu mg$, odnosno

$$|x_0| > \mu mg/k.$$

Koordinatu točke u kojoj će se tijelo zaustaviti dobit ćemo razmatranjem energije u sustavu. U početnom trenutku energija se sastoji isključivo od potencijalne energine opruga,

$$E = U[x_0] = \frac{1}{2}kx_0^2,$$

dok u trenutku kada se tijelo nakon gibanja zaustavi pri $x = x_1$ imamo

$$E = U[x_1] + \mu mg|x_1 - x_0|,$$

gdje drugi član na desnoj strani opisuje rad obavljen savladavajući silu trenja. Pretpostavimo li da je $x_1 > x_0$, odnosno $x_0 < 0$, slijedi

$$x_1 = -x_0 - 2mg\mu/k.$$

Kako bi tijelo u tom položaju nastavilo mirovati, sila opruga mora biti manja ili jednaka največem iznosu sile trenja, $k|x_1| \leq \mu mg$, što vodi na

$$|-x_0 - 2mg\mu/k| \leq mg\mu/k.$$

Napišemo li sada $x_0 = -s$ (ranije smo pretpostavili $x_0 < 0$), gdje je s tražena udaljenost, gornje se razmatranje svodi na sustav nejednakosti

$$s > b > 0, \qquad |s - 2b| \leq b,$$

gdje je $b = mg\mu/k$. Sustav se svodi na

$$0 < b < s \leq 3b.$$

Slijedi da je najveća dopuštena udaljenost

$$s_{\max} = 3b = 3mg\mu/k.$$

Rješenje: $s_{\max} = 3mg\mu/k$

Zadatak 1.3.6: Tijelo mase m klizi po vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ te brzinom iznosa v_0 udara u slobodni kraj vodoravne opruge konstante k koja djeluje kao zaustavni mehanizam. Odredi najveću dopuštenu vrijednost konstante k želimo li da tijelo, nakon što se zaustavi, ne krene u gibanje unazad, već da ostane mirovati. Također odredi duljinu zaustavnog puta koja odgovara najvećoj dopuštenoj vrijednosti konstante k.

Postupak: Tijelo će se zaustaviti kada kinetičku energiju koju je imalo u trenutku u kojem je dotaknulo oprugu "pretvori" u potencijalnu energiju sabijene opruge i rad obavljen savladavanjem sile trenja duž zaustavnog puta. Pišemo $K = F_{\text{tr.}}x + U[x]$, odnosno

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgx + \frac{k}{2}x^2,$$

gdje je x duljina zaustavnog puta. Rješavanjem kvadratne jednadžbe slijedi

$$x_{1,2} = \frac{\mu mg}{k}\left(-1 \pm \sqrt{1 + kv_0^2/\mu^2 mg^2}\right),$$

gdje uočavamo da je $x_2 < 0$ te odabiremo $x = x_1 > 0$ kao rješenje. Pri tom položaju opruga djeluje silom iznosa

$$F_{\text{opruga}} = kx = \mu mg\left(-1 + \sqrt{1 + kv_0^2/\mu^2 mg^2}\right),$$

a tijelo se neće pokrenuti unazad ukoliko je iznos te sile manji od maksimalnog iznosa kojeg može poprimiti sila trenja,

$$F_{\text{opruga}} \leq (F_{\text{tr.}})_{\text{max}} = \mu mg.$$

Uvrštavanjem izraza za F_{opruga} u gornju nejednakost slijedi

$$k \leq 3\mu^2 mg^2/v_0^2.$$

Najvećoj dopuštenoj vrijednosti, $k_{\text{max}} = 3\mu^2 mg^2/v_0^2$, odgovara najkraći zaustavni put,

$$x_{\text{min}} = v_0^2/\mu g.$$

Rješenje: $k_{\text{max}} = 3\mu^2 mg^2/v_0^2$, $x_{\text{min}} = v_0^2/\mu g$

Zadatak 1.3.7: Na vodoravnu transportnu traku koja se kreće stalnom brzinom iznosa $v_0 = 0.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ odozgo sipi pijesak stalnim masenim tokom $\mu = 30\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$. Odredi snagu motora potrebnu za održavanje trake u gibanju zanemarujući sve sile otpora.

Postupak: Snaga je umnožak iznosa brzine i komponente sile u smjeru gibanja. Ovdje je, prema Newtonovom aksiomu, vodoravna sila jednaka promjeni vodoravne komponente količine gibanja pijeska u jedinici vremena,

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m\, v_0}{\Delta t},$$

gdje je Δm masa pijeska koja je u vremenu Δt pala na traku i biva ubrzana do brzine iznosa v_0. Slijedi

$$F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v_0 = \mu v_0,$$

gdje je μ zadani maseni tok pijeska. Konačno, snaga je

$$P = F v_0 = \mu v_0^2.$$

Za zadane vrijednosti $P \simeq 10.8\,\mathrm{W}$.

Rješenje: $P = \mu v_0^2 \simeq 10.8\,\mathrm{W}$.

Zadatak 1.3.8: Vlak mase $m = 500\,\mathrm{t}$ se u početnom trenutku gibao brzinom iznosa $v_0 = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, a narednih ga je $\Delta t = 30\,\mathrm{s}$ lokomotiva ubrzavala duž vodoravne pruge djelujući stalnom snagom $P = 2\,\mathrm{MW}$. Odredi duljinu prevaljenog puta u tom intervalu vremena te iznos konačne brzine. Učinak svih sila otpora smatramo zanemarivim.

Postupak: Rad koji lokomotiva obavlja počevši od trenutka $t = t_0$ povećava kinetičku energiju vlaka. Možemo pisati

$$W = P(t - t_0) = K[t] - K[t_0] = \frac{m}{2}\left(v^2[t] - v^2[t_0]\right),$$

gdje je $v[t_0] = v_0$ početna brzina vlaka. Slijedi

$$v[t] = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)},$$

te kao konačnu brzinu u trenutku $t_1 = t_0 + \Delta t$ imamo

$$v_1 = v[t_1] = v[t_0 + \Delta t] = \sqrt{v_0^2 + \frac{2P}{m}\Delta t}.$$

Prevaljeni put računamo integrirajući $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned} s = \int_{t_0}^{t_1} v\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left(v_0^2 + \frac{2P}{m}(t - t_0)\right)^{1/2} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\Delta t} \left(v_0^2 + \frac{2P}{m}t'\right)^{1/2} \mathrm{d}t' \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{m}{2P}\left(v_0^2 + \frac{2P}{m}t'\right)^{3/2}\Bigg|_0^{\Delta t} \\ &= \frac{m}{3P}\left(\left(v_0^2 + \frac{2P}{m}\Delta t\right)^{3/2} - v_0^3\right) \end{aligned}$$

Za zadane vrijednosti $v_1 \simeq 56.7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, $s \simeq 323.1\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $s = (m/3P)((v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{3/2} - v_0^3) \simeq 323.1\,\mathrm{m}$,
$v_1 = (v_0^2 + (2P/m)\Delta t)^{1/2} \simeq 56.7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

Zadatak 1.3.9: U vreću pijeska mase $M = 20\,\mathrm{kg}$ koja mirno visi na užetu tako da je udaljenost njena težišta od objesišta $\ell = 5\,\mathrm{m}$ vodoravno se prema težištu ispali puščano zrno mase $m = 15\,\mathrm{g}$. Zrno se "zaustavi" u vreći, a vreća se (sa zrnom u sebi) nastavi njihati s kutom maksimalnog otklona $\alpha = 4^\circ$. Odredi brzinu puščanog zrna prije nego što se ono zabilo u vreću. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Zabijanje zrna mase m i brzine v u mirnu vreću mase M shvaćamo kao savršeno neelastični sudar te na osnovu očuvanja količine gibanja imamo

$$p = mv = (M+m)V,$$

gdje je V brzina vreće sa zrnom nakon što se zrno u njoj "zaustavilo". Na osnovu očuvanja mehaničke energije slijedi da maksimalni otklon vreće sa zrnom nastupa kada se početna kinetička energija u cijelosti pretvori u gravitacijsku potencijalnu energiju. Možemo pisati

$$E = \frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh = (M+m)g\ell(1-\cos\alpha).$$

Eliminacijom V iz gornjeg sustava slijedi

$$v^2 = 2g\ell\left(\frac{M+m}{m}\right)^2(1-\cos\alpha) \simeq 2g\ell\left(\frac{M}{m}\right)^2(1-\cos\alpha).$$

Za zadane vrijednosti $v \simeq 652.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $v = ((M+m)/m)(2g\ell(1-\cos\alpha))^{1/2} \simeq 652.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

1.4 Titranje

Zadatak 1.4.1: Objesimo li uteg o oprugu br. 1 ona se produlji za $\Delta x_1 = 4\,\mathrm{cm}$. Objesimo li isti uteg o oprugu br. 2 ona se produlji za $\Delta x_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Odredi periode kojima bi uteg titrao kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene u seriju i kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene paralelno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Označimo li masu utega s m te konstante dvaju opruga s k_1 i k_2, iz uvjeta ravnoteže utega kada on visi na tim oprugama imamo $mg = k_1\,\Delta x_1 = k_2\,\Delta x_2$, odnosno

$$k_1 = \frac{mg}{\Delta x_1}, \qquad k_2 = \frac{mg}{\Delta x_2}.$$

Konstanta paralelnog spoja dvaju opruga čije su konstante k_1 i k_2 je

$$k_\mathrm{p} = k_1 + k_2 = mg\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}$$

te je, na osnovu poznatog rješenja jednadžbe gibanja za masu na opruzi (harmonički oscilator), frekvencija titranja ω_p dana izrazom

$$\omega_\mathrm{p}^2 = \frac{k_\mathrm{p}}{m} = g\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}.$$

Tome odgovara period

$$T_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}}.$$

Za zadane vrijednosti $T_\mathrm{p} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$.

Konstanta serijskog spoja dvaju opruga je

$$k_\mathrm{s} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = mg\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2},$$

te je odgovarajuća frekvencija titranja ω_s dana izrazom

$$\omega_\mathrm{s}^2 = \frac{k_\mathrm{s}}{m} = g\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2}.$$

Odgovarajući period titranja je

$$T_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{s}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}}$$

što za zadane vrijednosti daje $T_\mathrm{s} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T_\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$, $T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$

Zadatak 1.4.2: Uteg je obješen o donji kraj dinamometra i titra u uspravnom smjeru. Najmanja i najveća vrijednost sile koju očitavamo na dinamometru tokom titranja su $T_{\min} = 3\,\mathrm{N}$ i $T_{\max} = 7\,\mathrm{N}$, a kružna frekvencija titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi masu utega i amplitudu titranja. (Dinamometar možemo smatrati oprugom zanemarive mase. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Položaj utega možemo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 koordinata ravnotežnog položaja, a A je amplituda titranja. Prema Newtonovu aksiomu, sila koja osigurava to gibanje je

$$F_y[t] = ma_y[t] = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y[t] = -m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje je m masa utega. Ta se sila sastoji od gravitacijske sile i od sile dinamometra,

$$F_y[t] = -mg + T[t].$$

Slijedi

$$T[t] = mg - m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje prepoznajemo

$$T_{\max} = mg + m\omega_0^2 A,$$

$$T_{\min} = mg - m\omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi možemo izračunati m i A:

$$m = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2g},$$

$$A = \frac{g}{\omega_0^2}\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}.$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $m \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $m = (T_{\max} + T_{\min})/2g \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A = g\omega_0^{-2}(T_{\max} - T_{\min})/(T_{\max} + T_{\min}) \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$

Zadatak 1.4.3: Najveći iznos brzine koju čestica postiže pri harmoničkom titranju je $v_{\mathrm{max}} = 5\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$, a najveći iznos akceleracije koju postiže je $a_{\mathrm{max}} = 10\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$. Odredi amplitudu A i kružnu frekvenciju titranja ω_0. Zatim odredi iznos brzine u trenutku u kojem otklon čestice od ravnotežnog (središnjeg) položaja iznosi $x = A/2$.

Postupak: Napišemo li otklon čestice koja harmonički titra amplitudom A i kutnom frekvencijom ω_0 kao

$$x[t] = A\cos[\omega_0 t],$$

brzina i akceleracija čestice dane su izrazima

$$v[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x[t] = -\omega_0 A\sin[\omega_0 t], \qquad a[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Kao maksimalni iznos brzine i maksimalni iznos akceleracije prepoznajemo

$$v_{\mathrm{max}} = \omega_0 A, \qquad a_{\mathrm{max}} = \omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi slijedi

$$\omega_0 = \frac{a_{\mathrm{max}}}{v_{\mathrm{max}}}, \qquad A = \frac{v_{\mathrm{max}}}{\omega_0} = \frac{v_{\mathrm{max}}^2}{a_{\mathrm{max}}}.$$

Za zadane vrijednosti v_{max} i a_{max} dobivamo $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = 2.5\,\mathrm{cm}$. Ovisnost iznosa brzine o otklonu dobit ćemo pišući izraz za brzinu u obliku

$$v^2 = \omega_0^2 A^2 \sin^2[\omega_0 t] = \omega_0^2 A^2 (1 - \cos^2[\omega_0 t]),$$

gdje sada možemo iskoristiti izraz za položaj čestice kako bismo eliminirali $\cos[\omega_0 t]$. Slijedi

$$v^2 = \omega_0^2 A^2 \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right) = \omega_0^2 (A^2 - x^2).$$

(Važno je uočiti da gornja relacija govori o kvadratima veličina v i x, što znači da ona govori isključivo o iznosima (modulima) brzine i otklona, a ne o njihovim predznacima.) Pri otklonu $x = A/2$ dobivamo

$$v_{x=A/2} = \omega_0 A\sqrt{1 - (1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0 A = \frac{\sqrt{3}}{2}\,v_{\mathrm{max}}$$

što za zadane vrijednosti daje $v_{x=A/2} \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

Napomena: Relaciju koja povezuje v^2 i x^2 se može dobiti i na osnovu izraza za ukupnu energiju pri harmoničkom titranju mase m na opruzi konstante elastičnosti k,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Posebno, pri maksimalnom otklonu imamo $v = 0$ i $x = A$, pa možemo pisati

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

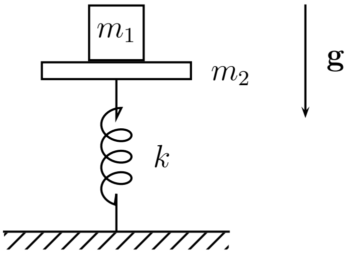
Iz gornjih izraza za energiju slijedi

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

gdje dijeleći s m i uzimajući u obzir da vrijedi $\omega_0^2 = k/m$ dobivamo $v^2 = \omega_0^2(A^2 - x^2)$ kao i ranije.

Rješenje: $\omega_0 = a_{\mathrm{max}}/v_{\mathrm{max}} = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = v_{\mathrm{max}}^2/a_{\mathrm{max}} = 2.5\,\mathrm{cm}$,
$v_{x=A/2} = v_{\mathrm{max}}\sqrt{3}/2 \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$

Zadatak 1.4.4: Tijelo mase $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ položeno je na tijelo mase $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ koje je s pomoću opruge konstante $k = 5 \times 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ oslonjeno o čvrsto tlo (vidi sliku). Odredi najveću amplitudu titranja sustava pri kojoj ne dolazi do međusobnog odvajanja tijela m_1 i m_2. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)



Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Pod pretpostavkom da pri titranju ne dolazi do odvajanja tijela m_1 i m_2, njihovu visinu nad tlom možamo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 ravnotežna visina, A je amplituda, a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

je kružna frekvencija titranja. Akceleracija masa m_1 i m_2 tada je

$$a_y[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t],$$

a silu koja djeluje na m_1 možemo napisati kao

$$F_y[t] = m_1 a_y[t] = m_1 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = -m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Ta se sila sastoji od gravitacijske sile iznosa $m_1 g$ koja djeluje prema dolje te od sile N usmjerene uvis kojom tijelo m_2 djeluje na m_1,

$$F_y[t] = -m_1 g + N[t].$$

Slijedi

$$N[t] = m_1 g - m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Uvjet ne-odvajanja tijela m_1 i m_2 možemo izraziti kao zahtjev da sila N bude pozitivna ili jednaka nuli, tj. da bude usmjerena prema gore ili da iščezne, što vodi na

$$g \geq \omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Taj je uvjet ispunjen za

$$A \leq \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{g(m_1 + m_2)}{k}.$$

Zaključujemo da je najveća amplituda titranja pri kojoj ne dolazi do odvajanja masa $A = g(m_1 + m_2)/k$. Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $A \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $A = g(m_1 + m_2)/k \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$

Zadatak 1.4.5: Čestica mase m se giba u x, y-ravnini pod djelovanjem sile $\mathbf{F} = -k\,(x\,\hat{\mathbf{x}} + 4y\,\hat{\mathbf{y}})$, a puštena u gibanje iz mirovanja u točki $\mathbf{r}_0 = x_0\,\hat{\mathbf{x}} + y_0\,\hat{\mathbf{y}}$. Napiši putanju čestice u obliku $y[x]$ te ju skiciraj. Zatim odredi najveću vrijednost iznosa brzine koju čestica postiže tokom gibanja.

Postupak: Jednadžba gibanja $m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, rastavljena na komponente u x, y-ravnini, daje dvije nevezane jednadžbe gibanja,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{i} \qquad m\ddot{y} + 4ky = 0.$$

Prepoznajemo da je riječ o harmoničkom titranju u x-smjeru frekvencijom

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

te o harmoničkom titranju u y-smjeru dvostruko većom većom frekvencijom. Opća rješenja možemo napisati kao

$$x[t] = A_x \cos[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad y[t] = A_y \cos[2\omega_0 t + \phi_y],$$

gdje su A_x i A_y amplitude titranja, a ϕ_x i ϕ_y su fazni pomaci. Za komponente brzine dobivamo

$$v_x[t] = \dot{x}[t] = -\omega_0 A_x \sin[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad v_y[t] = \dot{y}[t] = -2\omega_0 A_y \sin[2\omega_0 t + \phi_y].$$

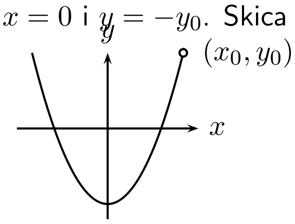
Uzmemo li $t = 0$ kao početni trenutak, na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{v}[0] = 0$ zaključujemo da fazni pomaci moraju biti jednaki 0 ili π. Nakon toga na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{r}[0] = x_0\,\hat{\mathbf{x}} + y_0\,\hat{\mathbf{y}}$ slijedi $A_x = |x_0|$ i $A_y = |y_0|$, gdje za $x_0 > 0$ uzimamo $\phi_x = 0$ dok za $x_0 < 0$ uzimamo $\phi_x = \pi$ te isto tako za y-smjer. Konačno, položaj možemo napisati kao

$$x[t] = x_0 \cos[\omega_0 t] \qquad \text{i} \qquad y[t] = y_0 \cos[2\omega_0 t] = y_0(2\cos^2[\omega_0 t] - 1).$$

Eliminacijom $\cos\omega_0 t$ iz gornjih izraza slijedi jednadžba putanje čestice u x, y ravnini,

$$y[x] = y_0\left(2x^2/x_0^2 - 1\right),$$

gdje prepoznajemo parabolu s tjemenom pri $x = 0$ i $y = -y_0$. Skica za $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$:



Komponente brzine su $v_x[t] = -\omega_0 x_0 \sin[\omega_0 t]$ i $v_y[t] = -4\omega_0 y_0 \cos[\omega_0 t]\sin[\omega_0 t]$ te za kvadrat njena iznosa dobivamo

$$v^2[t] = v_x^2[t] + v_y^2[t] = \omega_0^2 \sin^2[\omega_0 t]\,(x_0^2 + 16y_0^2\cos^2[\omega_0 t]).$$

Zbog lakšeg računa uvodimo varijablu $u = \cos^2[\omega_0 t]$ koja poprima vrijednosti iz intervala $[0, 1]$. Gornji izraz za kvadrat iznosa brzine sada možemo napisati kao

$$v^2 = \omega^2(1-u)(x_0^2 + 16y_0^2 u) = -16y_0^2\omega^2(u-1)\left(u + x_0^2/16y_0^2\right), \qquad u \in [0, 1],$$

što je parabola s negativnim vodećim koeficijentom, s nultočkama pri $u_1 = -x_0^2/16y_0^2$ i $u_2 = 1$, te s tjemenom pri

$$u_0 = (u_1 + u_2)/2 = \left(1 - x_0^2/16y_0^2\right)/2.$$

Naš je cilj pronaći maksimum te parabole na intervalu $u \in [0, 1]$. Uočavamo da za sve x_0 i y_0 vrijedi $u_0 \leq 1/2$. Za $u_0 \geq 0$ tjeme se nalazi unutar intervala $[0, 1]$ te odgovara maksimumu kvadrata iznosa brzine. Zaključujemo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=u_0}} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 \leq 1.$$

Ako je $u_0 < 0$, maksimum vrijednosti v^2 se za $u \in [0, 1]$ nalazi pri lijevom rubu intervala, odnosno pri $u = 0$, te imamo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=0}} = \omega_0 x_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 > 1.$$

Rješenje: $y[x] = y_0\,(2x^2/x_0^2 - 1)$, $v_{\max} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0$ za $x_0^2/16y_0^2 \leq 1$, $v_{\max} = \omega_0 x_0$ za $x_0^2/16y_0^2 > 1$

Zadatak 1.4.6: Otklon čestice koja prigušeno titra opisujemo izrazom $x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi]$. Odredi konstante $A > 0$ (amplitudu u $t = 0$) i ϕ (fazu) ako u trenutku $t = 0$ čestica ima brzinu $\dot{x} = v_0 > 0$ pri otklonu $x = x_0 > 0$.

Postupak: Ako je položaj opisan izrazom

$$x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

onda brzinu možemo napisati kao

$$\dot{x}[t] = -(\delta + \omega\tan[\omega t + \phi])\, x[t].$$

Najprije razmotrimo početni uvjet za brzinu,

$$\dot{x}[0] = -(\delta + \omega\tan\phi)\, x_0 = v_0.$$

On je ispunjen za

$$\tan\phi = -\frac{\delta}{\omega} - \frac{v_0}{x_0\omega},$$

gdje valja voditi računa o dvoznačnosti pri određivanju samog ϕ. S obzirom da je zadano $v_0 > 0$ i $x_0 > 0$, tangens faze ϕ je negativan što dopušta fazu (kut) iz II ili iz IV kvadranta. Zatim razmatramo početni uvjet za otklon,

$$x[0] = A\cos\phi = x_0,$$

S obzirom da zahtijevamo $A > 0$ te da je ovdje zadano $x_0 > 0$, slijedi $\cos\phi > 0$ što znači da faza ϕ pripada I ili IV kvadrantu, od čega je samo IV kvadrant dopušten ranije dobivenim uvjetom. Konačno, iz početnog uvjeta za elongaciju slijedi

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = x_0\sqrt{1 + \tan^2\phi} = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{\delta + v_0/x_0}{\omega}\right)^2}.$$

Rješenje: $\phi = \arctan[-(\delta + v_0/x_0)/\omega] \in [-\pi/2, 0]$, $A = x_0\sqrt{1 + ((\delta + v_0/x_0)/\omega)^2}$

Zadatak 1.4.7: Čestica prigušeno titra duž x-osi. Koordinate triju uzastopnih krajnjih položaja čestice (položaji pri kojima brzina čestice iščezava) su $x_1 = 20\,\mathrm{cm}$, $x_2 = 5.6\,\mathrm{cm}$ i $x_3 = 12.8\,\mathrm{cm}$. Odredi koordinatu ravnotežnog položaja.

Postupak: Položaj čestice koja prigušeno titra duž x-osi možemo općenito napisati kao

$$x[t] = x_\infty + A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

gdje je x_∞ koordinata ravnotežnog položaja, a

$$\omega = 2\pi/T$$

je period prigušenog titranja. Napišemo li brzinu čestice kao

$$\dot{x}[t] = -A\mathrm{e}^{-\delta t}(\delta\cos[\omega t + \phi] + \omega\sin[\omega t + \phi]),$$

lako je uočiti da ona miruje, tj. nalazi se u krajnjem položaju, u trenucima koji su u vremenu razmaknuti polovicu perioda prigušenog titranja. Označimo li s x_n koordinatu krajnjeg položaja čestice, slijedi da za koordinate dvaju uzastopnih krajnjih položaja vrijedi relacija

$$\frac{x_{n+1} - x_\infty}{x_n - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$$

(negativan predznak na desnoj strani je prisutan jer se dva uzastopna krajnja položaja nalaze sa suprotnih strana ravnotežnog položaja). U našem slučaju imamo dva para uzastopnih krajnjih položaja za koje pišemo

$$\frac{x_2 - x_\infty}{x_1 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}, \qquad \frac{x_3 - x_\infty}{x_2 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}.$$

Eliminacijom $\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$ iz gornjeg sustava dobivamo

$$(x_1 - x_\infty)(x_3 - x_\infty) = (x_2 - x_\infty)^2,$$

iz čega slijedi

$$x_\infty = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 - 2x_2 + x_3}.$$

Rješenje: $x_\infty = (x_1 x_3 - x_2^2)/(x_1 - 2x_2 + x_3) = 10.4\,\mathrm{cm}$

Zadatak 1.4.8: Čestica koja prigušeno titra s logaritamskim dekrementom prigušenja $\lambda = 0.002$ puštena je u gibanje iz mirovanja pri otklonu $x_0 = 1\,\mathrm{cm}$ u odnosu na ravnotežni položaj. Odredi ukupni put koji će čestica preći do "konačnog zaustavljanja".

Postupak: Ako $x = 0$ odgovara ranvotežnom položaju, uzastopni krajnji položaji čestice koja prigušeno titra zadovoljavaju relaciju

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)} = -\mathrm{e}^{-\lambda/2},$$

gdje je x_n položaj n-tog krajnjeg položaja, δ je koeficijent prigušenja, T je period prigušenog titranja, a $\lambda = \delta T$ je logaritamski dekrement prigušenja. Ukupan put koji čestica pravaljuje titrajući, krene li iz mirovanja pri otklonu x_0, možemo napisati kao

$$\begin{aligned} s &= |x_0| + 2|x_1| + 2|x_2| + 2|x_3| + \cdots \\ &= x_0 + 2x_0\mathrm{e}^{-\lambda/2} + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^2 + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^3 + \cdots \\ &= x_0\Big(-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k\Big). \end{aligned}$$

Sumu prepoznajemo kao geometrijski red,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}},$$

te je prevaljeni put

$$s = x_0\left(-1 + \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}}\right).$$

Rješenje: $s = x_0\left(-1 + 2/(1-\mathrm{e}^{-\lambda/2})\right) \simeq 4x_0/\lambda \simeq 20\,\mathrm{m}$

Zadatak 1.4.9: Muzička vilica u zraku titra frekvencijom $f = 440\,\mathrm{Hz}$, a amplituda titranja joj se smanji na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau_{1/2} = 4\,\mathrm{s}$. Odredi koliko bi se smanjila frekvencija titranja iste vilice kada bi ona titrala u sredstvu zbog kojeg bi se amplituda smanjila na jednu polovinu u vremenu $\tau'_{1/2} = 3\,\mathrm{s}$.

Postupak: Amplituda prigušenog titranja se smanjuje u vremenu razmjerno s $\exp(-\delta t)$ pa vrijedi $\exp(-\delta\tau_{1/2}) = 1/2$, odnosno

$$\delta\tau_{1/2} = \ln 2,$$

gdje je δ koeficijent prigušenja. U zraku vilica titra frekvencijom

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \qquad \delta = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}},$$

dok u sredstvu s jačim prigušenjem imamo

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta'^2, \qquad \delta' = \frac{\ln 2}{\tau'_{1/2}},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija vilice. Eliminacijom ω_0 iz gornjeg sustava slijedi

$$\omega'^2 = \omega^2 - (\delta'^2 - \delta^2)$$

Razlika frekvencija je

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \omega\left(\sqrt{1 - \frac{\delta'^2 - \delta^2}{\omega^2}} - 1\right).$$

Uzmemo li u obzir $\delta < \delta' \ll \omega$ možemo koristiti razvoj $\sqrt{1 \pm \epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ te dobivamo

$$\Delta\omega \simeq -\frac{\delta'^2 - \delta^2}{2\omega} = \frac{(\ln 2)^2}{2\omega}\left({\tau_{1/2}}^{-2} - {\tau'_{1/2}}^{-2}\right).$$

Konačno uz $\omega = 2\pi f$,

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{(\ln 2)^2}{8\pi^2 f}\left({\tau_{1/2}}^{-2} - {\tau'_{1/2}}^{-2}\right).$$

Rješenje: $\Delta f = f' - f = (\ln 2)^2\big(\tau_{1/2}^{-2} - {\tau'_{1/2}}^{-2}\big)/8\pi^2 f \simeq -6.72 \times 10^{-7}\,\mathrm{Hz}$

Zadatak 1.4.10: Kritično prigušeni oscilator vlastite frekvencije ω_0 pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja početnom brzinom iznosa v_0. Odredi najveći otklon koji će ovaj oscilator postići. Zatim odredi najveći iznos brzine koji će oscilator postići tokom povratka iz najjače otklonjenog u ravnotežni položaj.

Postupak: Opće rješenje jednadžbe gibanja kritično prigušenog oscilatora (koeficijent prigušenja δ jednak je vlastitoj frekvenciji ω_0) ima oblik

$$x[t] = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t},$$

gdje su c_1 i c_2 konstante. Tomu odgovara brzina

$$\dot{x}[t] = (c_2 - \omega_0(c_1 + c_2 t))\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Početni uvjet za položaj daje

$$x[0] = c_1 = 0,$$

s pomoću čega početni uvjet za brzinu daje

$$\dot{x}[0] = c_2 = v_0.$$

Konačno, otklon, brzinu i akceleraciju oscilatora pišemo kao

$$x[t] = v_0 t\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \dot{x}[t] = v_0(1 - \omega t)\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \ddot{x}[t] = -v_0\omega_0(2 - \omega_0 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Najveći otklon dobivamo iz uvjeta $\dot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 1/\omega_0$ te

$$x_{\max} = x[1/\omega_0] = \frac{v_0}{\mathrm{e}\omega_0}.$$

Najveći iznos brzine slijedi iz uvjeta $\ddot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 2/\omega_0$. Možemo pisati

$$v_{\max} = |\dot{x}[2/\omega_0]| = \frac{v_0}{\mathrm{e}^2}.$$

Rješenje: $x_{\max} = v_0/\mathrm{e}\omega_0$, $v_{\max} = v_0/\mathrm{e}^2$

Zadatak 1.4.11: Mornarički top (16"/50 Mk VII) čija je masa $M = 120\,\mathrm{t}$ ispaljuje projektil mase $m_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{t}$ brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ovjes topa dopušta topu da se on po ispaljenju projektila pomakne unazad čime se ublaži djelovanje povratnog udarca na konstrukciju broda. Ovjes je podešen je tako da se top ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi vrijeme koje protječe od ispaljenja projektila do trenutka u kojem se top nalazi u najjače otklonjenom položaju ako udaljenost tog položaja od ravnotežnog položaja topa iznosi $x_\mathrm{max} = 1.5\,\mathrm{m}$. Zatim odredi najveći iznos sile kojom top nakon ispaljenja projektila djeluje na brod.

Postupak: S obzirom da je top kritično prigušeni oscilator njegovo gibanje u odnosu na brod opisujemo izrazom

$$x[t] = \mathrm{e}^{-\delta t}(x_0 + (v_0 + x_0\delta)t),$$

gdje su x_0 i v_0 početni položaj i brzina u trenutku $t = 0$. Ovdje $t = 0$ odgovara trenutku ispaljenja projektila pa imamo $x_0 = 0$, dok početnu brzinu određujemo na osnovu očuvanja količine gibanja pri ispaljenju projektila. Količina gibanja projektila $m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}$ mora po iznosu biti jednaka količini gibanja topa Mv_0, pa imamo

$$v_0 = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M},$$

odnosno,

$$x[t] = v_0 t\mathrm{e}^{-\delta t} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M}\, t\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Funkcija $t\mathrm{e}^{-\delta t}$ ima maksimum pri $t = \delta^{-1}$ gdje je njena vrijednost $1/e\delta$, pa imamo

$$x_\mathrm{max} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}\delta M}.$$

Iz gornjeg izraza određujemo

$$\delta = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}},$$

te za trenutak u kojem top dosiže x_max dobivamo

$$t = \frac{1}{\delta} = \frac{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}.$$

Za zadane vrijdnosti $t \simeq 0.612\,\mathrm{s}$. Iznos sile kojom top djeluje na brod računamo na osnovu mase i akceleracije samog topa,

$$F[t] = M\ddot{x}[t] = m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t).$$

Može se pokazati da funkcija $\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t)$ za $t \geq 0$ ima najveću apsolutnu vrijednost upravo u trenutku $t = 0$, dakle netom nakon ispaljenja projektila (a ne pri maksimalnom otklonu topa gdje je sila povratne opruge najveća, kao niti u još kasnijem trenutku u kojem je ispunjen uvjet $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = 0$). Slijedi

$$F_\mathrm{max} = |F[0]| = 2m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta = \frac{2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}.$$

Za zadane vrijednosti $F_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $t = \mathrm{e}Mx_\mathrm{max}/m_\mathrm{p}v_\mathrm{p} \simeq 0.612\,\mathrm{s}$, $F_\mathrm{max} = 2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2/\mathrm{e}Mx_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$

Zadatak 1.4.12: Kuglica mase $m = 12\,\mathrm{g}$ i polumjra $r = 1\,\mathrm{cm}$ vezana je oprugom za čvrsto uporište tako da kružna frekvencija njenog neprigušenog titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi logaritamski dekrement prigušenja, frekvenciju prigušenog titranja te rezonantnu frekvenciju tog oscilatora kada je on uronjen u ulje viskoznosti $\eta = 0.4\,\mathrm{Pa\,s}$. (Silu otpora pri gibanju kuglice kroz ulje opisati Stokesovim zakonom.)

Postupak: Prema Stokesovu zakonu, jakost sile koja koči gibanje kugle polumjera r i brzine iznosa v pri njenu gibanju kroz fluid koeficijenta viskoznosti η opisana je izrazom

$$F_\eta = 6\pi\eta r v.$$

Prema tome, jednadžbu gibanja kuglice možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta r\dot{x} - kx,$$

gdje je k konstanta opruge. Podijelimo li gornju jednadžbu s m možemo ju napisati u poznatom obliku,

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

gdje je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ zadana frekvencija neprigušenog titranja, dok parametar

$$\delta = 3\pi\eta r/m$$

opisuje jakost prigušenja. Za $\delta < \omega_0$, što je za vrijednosti ovdje zadanih parametara ispunjeno (dobiva se $\delta/\omega_0 = 0.5$), rješenje jednadžbe gibanja je prigušeno titranje frekvencijom

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Logaritamski dekrement prigušenja ovdje je

$$\lambda = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 2\pi\left(\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 1\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\left(\frac{\omega_0 m}{3\pi\eta r}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} \simeq 3.63.$$

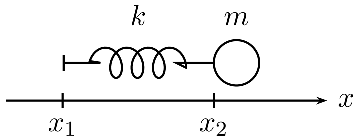
Rezonantna frekvencija dana je izrazom

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\big((\omega_0 m/3\pi\eta r)^2 - 1\big)^{-1/2} \simeq 3.63$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$,
$\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

Zadatak 1.4.13: Na jednom kraju opruge konstante k pričvršćeno je tijelo mase m. Drugi kraj opruge, pod utjecajem vanjske sile, titra duž osi opruge amplitudom R i frekvencijom ω_p. Odredi amplitudu titranja mase m te najveći iznos produljenja opruge do kojeg dolazi tokom gibanja ovog sustava.

Postupak: Neka je x_1 položaj kraja opruge koji titra amplitudom R i frekvencijom ω_p, a x_2 neka je položaj suprotnog kraja na kojem je pričvršćena masa m.



Jednadžbu gibanja mase m možemo napisati kao

$$m\ddot{x}_2 = -k\,\Delta\ell = -k(\ell - \ell_0) = -k(x_2 - x_1 - \ell_0),$$

gdje je $\Delta\ell$ produljenje opruge, ℓ je njena trenutna duljina, a konstanta ℓ_0 je ravnotežna duljina opruge. Titranje x_1 možemo opisati izrazom

$$x_1[t] = R\cos[\omega_\mathrm{p} t].$$

Nadalje, s obzirom da ravnotežnu duljinu opruge ℓ_0 možemo odabrati po volji, zbog jednostavnosti uzimamo $\ell_0 = 0$. Dijeleći jednadžbu gibanja s m možemo ju napisati u obliku

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = R\omega_0^2 \cos[\omega_\mathrm{p} t],$$

gdje je

$$\omega_0^2 = k/m, \qquad f_\mathrm{p} = kR/m = R\omega_0^2.$$

Prepoznajemo da se radi o neprigušenom oscilatoru vlastite frekvencije ω_0, ali s vanjskom silom. Općenit izraz za amplitudu prisilnog titranja,

$$A = \frac{f_\mathrm{p}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2)^2 + (2\delta\omega_\mathrm{p})^2}},$$

uz $\delta = 0$ jer nema prigušenja te uz gornji izraz za f_p poprima oblik

$$A = \frac{f_\mathrm{p}}{|\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2|} = \frac{R\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2|} = \frac{R}{\left|1 - (\omega_\mathrm{p}/\omega_0)^2\right|}.$$

Najveće produljenje opruge može se odrediti iz najvećeg iznosa akceleracije mase m koji pri harmoničkom titranju amplitudom A i frekvencijom ω_p iznosi

$$a_\mathrm{max} = \omega_\mathrm{p}^2 A.$$

Najveće produljenje je

$$(\Delta\ell)_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{max}}{k} = \frac{m a_\mathrm{max}}{k} = \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_0^2} A = \frac{R}{\left|1 - (\omega_0/\omega_\mathrm{p})^2\right|}.$$

Rješenje: $\omega_0^2 = k/m$, $A = R/|1 - (\omega_\mathrm{p}/\omega_0)^2|$, $(\Delta\ell)_\mathrm{max} = R/|1 - (\omega_0/\omega_\mathrm{p})^2|$

Zadatak 1.4.14: Kada na prigušeni oscilator djeluje vanjska harmonička sila amplitude F_{p} i frekvencije jednake rezonantnoj frekvenciji oscilatora, on titra amplitudom $A_{\mathrm{rez.}}$. Kada na isti oscilator djeluje vanjska sila nepromijenjene amplitude F_{p}, ali frekvencije koja je znatno niža od rezonantne frekvencije (teži u nulu), oscilator titra amplitudom A_0. Izrazi logaritamski dekrement prigušenja oscilatora s pomoću omjera $q = A_{\mathrm{rez.}}/A_0$.

Postupak: Logaritamski dekrement prigušenja oscilatora opisanog s ω_0 i δ definiran je s $\lambda = \delta T$, gdje je $T = 2\pi/\omega$ period prigušenog titranja (bez vanjske sile), a $\omega = \omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}$ je frekvencija. Možemo pisati

$$\lambda = 2\pi\frac{\delta/\omega_0}{\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Amplituda prisilnog titranja tog oscilatora uz vanjsku silu amplitude F_{p} i frekvencije ω_{p} dana je izrazom

$$A[\omega_{\mathrm{p}}] = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{\mathrm{p}}^2)^2+(2\delta\omega_{\mathrm{p}})^2}}.$$

U rezonanciji gdje je $\omega_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{rez.}} = \omega_0\sqrt{1-2(\delta/\omega_0)^2}$, te kada $\omega_{\mathrm{p}} \to 0$, imamo

$$A_{\mathrm{rez.}} = A[\omega_{\mathrm{rez.}}] = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{2\delta\omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}, \qquad \text{i} \qquad A_0 = A[0] = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{\omega_0^2}.$$

Slijedi

$$q = \frac{A_{\mathrm{rez.}}}{A_0} = \frac{1}{2(\delta/\omega_0)\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Iz gornjeg izraza računamo omjer δ/ω_0,

$$\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{q^2}}\right).$$

Odabiremo rješenje s negativnim predznakom ispred korijena jer za $(\delta/\omega_0)^2 > 1/2$ pojava rezonancije ne postoji te računamo logaritamski dekrement prigušenja,

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-q^{-2}}}{1+\sqrt{1-q^{-2}}}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\sqrt{\left(1-\sqrt{1-q^{-2}}\right)/\left(1+\sqrt{1-q^{-2}}\right)}$

Zadatak 1.4.15: Ovjes (opruge i amortizeri) automobilske prikolice mase $m = 200\,\mathrm{kg}$ podešen je tako da se ona, kad nije opterećena, ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi rezonantnu frekvenciju prikolice opterećene teretom mase $M = 400\,\mathrm{kg}$ ako je opaženo da se ona pod tim opterećenjem spusti za $H = 10\,\mathrm{cm}$. (Prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Rezonantna frekvencija oscilatora dana je poznatim izrazom

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija oscilatora, a δ je parametar koji opisuje prigušenje. S obzirom da prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu konstante k s trenjem b, vlastita frekvencija je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + M}},$$

a koeficijent prigušenja je

$$\delta = \frac{b}{2(M + m)}.$$

Na osnovu podatka da se neopterećena prilkolica ponaša kao kritično prigušeni oscilator, što znači da je za $M = 0$ vrijedi $\omega_0 = \delta$, ovdje imamo

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{b}{2m}.$$

Nadalje, na osnovu opažanja da se pod teretom težine Mg prikolica spusti (sabije oprugu) za visinu H, slijedi jenakost sila $kH = Mg$, odnosno

$$k = Mg/H.$$

Konačno, rezonantnu frekvenciju s pomoću gornjih izraza možemo napisati kao

$$\omega_{\mathrm{rez.}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 = \frac{k}{m + M} - 2\left(\frac{b}{2(M + m)}\right)^2 = \frac{k}{m + M} - \frac{2km}{(M + m)^2} = \frac{k(M - m)}{(M + m)^2} = \frac{M(M - m)}{(M + m)^2}\,\frac{g}{H},$$

odnosno

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \frac{M}{M + m}\sqrt{\frac{g}{H}\left(1 - \frac{m}{M}\right)}.$$

(Zanimljivo je uočiti da se kod ovako podešenog ovjesa pojava rezonancije pojavljuje tek za $M \geq m$, jer u protivnom je izraz pod korijenom negativan.) Za zadane vrijednosti parametara m, M i H dobije se $\omega_{\mathrm{rez.}} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Rješenje: $\omega_{\mathrm{rez.}} = (M/(M + m))\sqrt{(g/H)(1 - m/M)} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Zadatak 1.4.16: Automobil se kreće po neravninama koje možemo opisati visinom $y[x] = H\cos[2\pi x/\lambda]$, gdje je x vodoravna koordinata položaja, $H = 2\,\mathrm{cm}$ je "amplituda", a λ je "valna duljina" neravnina. Ovjes automobila ima $q = 5$ puta slabije prigušenje od onog koji bi odgovarao kritičnom prigušenju. Odredi amplitudu titranja automobila duž uspravne osi kada se on kreće brzinom pri kojoj dolazi do rezonancije. (Automobil shvaćamo kao masu oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Prijelazne pojave ne razmatramo.)

Postupak: Automobil shvaćamo kao oscilator koji se sastoji od mase m oslonjene na oprugu konstante k uz koeficijent trenja b, čemu odgovaraja vlastita frekvencija

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

i koeficijent gušenja $\delta = b/2m$. Pri kritičnom prigušenju vrijedi $\delta = \omega_0$, pa s obzirom da je ovdje prigušenje q puta slabije od kritičnog, imamo

$$\delta = \frac{\omega_0}{q}.$$

Pri gibanju automobila donji kraj opruge titra s amplitudom H, a to znači da amplitudu vanjske sile koja na njega djeluje možemo napisati kao

$$F_\mathrm{p} = kH = m\omega_0^2 H.$$

Amplituda titranja u rezonanciji dana je poznatim izrazom

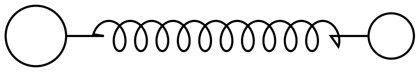
$$A_\mathrm{rez.} = \frac{F_\mathrm{p}/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za F_p i δ slijedi

$$A_\mathrm{rez.} = \frac{Hq^2}{2\sqrt{q^2-1}}.$$

Rješenje: $A_\mathrm{r} = (H/2)\left(q^2/\sqrt{q^2-1}\right) \simeq 5.103\,\mathrm{cm}$

Zadatak 1.4.17: Čestica mase m_1 i čestica mase m_2 povezane su oprugom konstante k. Odredi kružnu frekvenciju titranja tog sustava.



Postupak: Neka se gibanje čestica odvija duž x-osi; x_1 neka je koordinata čestice m_1, a x_2 neka je koordinata čestice m_2. Neka je u ravnoteži $x_2 > x_1$. Označimo li s ℓ_0 ravnotežnu duljinu opruge, promjenu njene duljine uslijed gibanja čestica možemo napisati kao

$$\xi = x_2 - x_1 - \ell_0.$$

Jednadžbe gibanja čestica sada možemo napisati kao

$$m_1 \ddot{x}_1 = k\xi, \qquad m_2 \ddot{x}_2 = -k\xi.$$

Napišemo li sada jednadžbu gibanja za varijablu ξ, dobit ćemo

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{k\xi}{m_1} + \frac{k\xi}{m_2},$$

odnosno

$$\ddot{\xi} + k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,\xi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2}$

1.5 Valovi

Zadatak 1.5.1: Uteg mase $M = 2\,\mathrm{kg}$ mirno visi na užetu duljine $\ell = 10\,\mathrm{m}$ i mase $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. Odredi trajanje putovanja transverzalnog valnog poremećaja s jednog na drugi kraj kraj užeta (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Brzina kretanja valnog poremećaja dana je izrazom

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

gdje je T napetost, a

$$\mu = \frac{m}{\ell}$$

je linijska gustoća mase užeta. Napetost užeta u točki na visini h iznad njegova donjeg kraja jednaka je zbroju težine utega i težine dijela užeta koje se nalazi ispod te točke,

$$T[h] = \left(M + \frac{h}{\ell}m\right) g.$$

Slijedi da je brzina kretanja vala na visini h iznad donjeg kraja

$$v[h] = \sqrt{\frac{T[h]}{\mu}} = \sqrt{\left(\frac{M\ell}{m} + h\right) g}.$$

Trajanje putovanja vala s jednog kraja na drugi je

$$\tau = \int \mathrm{d}t = \int_{h=0}^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{v[h]} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{M\ell/m + h}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{M\ell}{m} + h}\,\Bigg|_0^{\ell} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\sqrt{1 + \frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{M}{m}}\right).$$

Za zadane vrijednosti M, ℓ i m dobivamo $\tau \simeq 0.477\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $\tau = 2\sqrt{\ell/g}\left(\sqrt{1 + M/m} - \sqrt{M/m}\right) \simeq 0.477\,\mathrm{s}$

Zadatak 1.5.2: Napetim užetom, brzinom iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, putuje transverzalni valni poremećaj oblika $y[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $\alpha = 0.1$ i b konstante. Odredi maksimalni iznos brzine kojom se gibaju čestice užeta.

Postupak: Valni poremećaj koji se brzinom iznosa v užetom giba na desno općenito opisujemo s

$$y[x,t] = f[x - vt],$$

gdje je f funkcija jedne varijable. U trenutku $t = 0$ imamo

$$y[x,0] = f[x].$$

Uzmemo li da se oblik valnog poremećaja opisan u zadatku funkcijom $y[x]$ odnosi na trenutak $t = 0$, mora vrijediti $f[x] = y[x]$, te funkciju f prepoznajemo kao

$$f[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}.$$

Brzina kojom se gibaju čestice je

$$\dot{y}[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} y[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} f[x - vt] = -v f'[x - vt].$$

Najveći iznos te brzine možemo pronaći tako da se ograničimo na trenutak $t = 0$ te da razmotrimo brzine čestica duž čitave x-osi,

$$\dot{y}[x,0] = -v f'[x].$$

Ekstrem gornje brzine tražimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y}[x,0] = -v f''[x] = -\frac{2\alpha x \mathrm{e}^{-(x/b)^2}}{b^2}\left(3 - \frac{2x^2}{b^2}\right),$$

koji je ispunjen za

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\, b, \qquad x_3 = 0.$$

Brzine čestica za gornje vrijednosti x su

$$\dot{y}[x_{1,2}, 0] = \frac{2}{\mathrm{e}^{3/2}}\alpha v, \qquad \dot{y}[x_3, 0] = -\alpha v.$$

S obzirom da je $2 < \mathrm{e}^{3/2}$ zaključujemo da je najveći iznos brzine koju postižu čestice pri gibanju zadanog valnog poremećaja

$$|\dot{y}|_{\max} = \alpha v.$$

Za zadane vrijednosti $|\dot{y}|_{\max} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $|\dot{y}|_{\max} = \alpha v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Zadatak 1.5.3: Beskonačnim užetom napetosti $T = 2\,\mathrm{kN}$ putuje transverzalni valni poremećaj čiji je oblik u trnutku $t = 0$ opisan s $y[x] = A\mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $A = 1\,\mathrm{cm}$ i $b = 10\,\mathrm{cm}$ konstante. Odredi ukupnu energiju valnog poremećaja. (Koristi se integral $\int_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$.)

Postupak: Uzmemo li da valni poremećaj putuje na desno, opisujemo ga valnom funkcijom

$$y[x,t] = f[x - vt] = A\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2},$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina propagacije vala, T je napetost, a $\mu = \Delta m/\Delta x$ je linijska gustoća mase užeta. Linijska gustoća kinetičke energije užeta je

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}v_y^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{2\mu v^2 A^2}{b^2}\left(\frac{x - vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijska gustoća potencijalne energije je

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{T(\Delta x' - \Delta x)}{\Delta x},$$

gdje je $\Delta x' - \Delta x$ produljenje elementa užeta uslijed valnog gibanja. Pišući

$$\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2} \simeq \Delta x\left(1 + (\Delta y/\Delta x)^2/2\right),$$

gdje smo koristili $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$, slijedi

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{T}{2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial x}\right)^2 = \frac{2TA^2}{b^2}\left(\frac{x - vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijsku gustoću ukupne energije u trenutku $t = 0$ možemo, koristeći $\mu v^2 = T$, napisati kao

$$\left.\frac{\Delta E}{\Delta x}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\Delta K}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}\right)\right|_{t=0} = \frac{4TA^2}{b^4}x^2\mathrm{e}^{-2x^2/b^2}.$$

Ukupna energija valnog poremećaja je

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta E}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{4TA^2}{b^4}\frac{b^3}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{TA^2}{b}.$$

Za zadane vrijednosti $E \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

Rješenje: $E = TA^2\sqrt{\pi}/b\sqrt{2} \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

Zadatak 1.5.4: Čelična žica promjera $d = 1\,\mathrm{mm}$ i duljine $\ell = 3\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da joj frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f = 200\,\mathrm{Hz}$. Odredi ukupnu energiju titranja te žice kada ona titra u osnovnom modu maksimalnom amplitudom $A = 2\,\mathrm{cm}$. (Gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Postupak: Titranje stojnog vala u osnovnom modu na napetoj žici s krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ možemo opisati valnom funkcijom

$$y[x,t] = A\sin[kx]\cos[\omega t],$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = 2\pi f.$$

Linijska gustoća kinetičke energije žice je

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2[kx]\sin^2[\omega t],$$

gdje je

$$\mu = \rho S = r^2\pi\rho = \frac{d^2\pi\rho}{4}$$

linijska gustoća mase žice. Ukupnu kinetičku energiju dobivamo integracijom preko čitavog raspona žice,

$$K = \int_{x=0}^{\ell}\frac{\Delta K}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2[\omega t]\int_0^{\ell}\sin^2[\pi x/\ell]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\ell\sin^2[\omega t]$$

(gornji je integral očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na polovici perioda jednaka $1/2$). Vidimo da kinetička energija postiže maskimalnu vrijednost

$$(K)_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\ell$$

u trenucima kada vrijedi $\sin[\omega t] = \pm 1$. Primjećujemo da u tim trenucima vrijedi $\cos[\omega t] = 0$, odnosno $y[x,t] = 0$, što znači da u tim trenucima žica nije otklonjena te da je njena potencijalna energija jednaka nuli. Konačno, s obzirom da je ukupna energija zbroj kinetičke i potencijalne energije, te da je ukupna energija očuvana u vremenu, zaključujemo

$$E = K + U = (K)_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2\ell = \frac{1}{4}\frac{d^2\pi\rho}{4}(2\pi f)^2 A^2\ell = \frac{1}{4}d^2\pi^3\rho f^2 A^2\ell.$$

Za zadane vrijednosti d, ℓ i f, A i ρ dobije se $E \simeq 2.90\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $E = d^2\pi^3\rho f^2 A^2\ell/4 \simeq 2.90\,\mathrm{J}$

Zadatak 1.5.5: Gitarska žica 1E, promjera $2r = 0.01''$, načinjena od čelika Youngova modula elastičnosti $E = 2.2 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$ i gustoće $\rho = 7700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, razapeta je na rasponu duljine $\ell = 25.5''$. Odredi silu napetosti i odgovarajuće relativno produljenje žice ako ona u osnovnom modu titra frekvencijom $f = 330\,\mathrm{Hz}$. $(1'' = 1\,\mathrm{in} = 2.54 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}.)$

Postupak: Pri titranju stojnog vala na žici duljine ℓ s učvršćenim krajevima, za osnovni mod titranja vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2},$$

gdje je λ valna duljina. Tome odgovara valni vektor

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell},$$

odnosno frekvencija

$$\omega = 2\pi f = kv,$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina širenja vala na žici, T je napetost, a

$$\mu = \rho S = \rho r^2 \pi$$

je linijska gustoća mase žice. Slijedi

$$T = \mu v^2 = \rho r^2 \pi \,(2\pi f/k)^2 = \rho r^2 \pi \,(2\pi \ell)^2 = 4 r^2 \pi \rho \ell^2 f^2.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 71.3\,\mathrm{N}$. Relativno produljenje žice u odnosu na stanje bez naprezanja je

$$\delta_L = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{T/S}{E} = \frac{T}{r^2 \pi E} = \frac{4\rho \ell^2 f^2}{E}.$$

Za zadane vrijednosti $\delta \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

Rješenje: $T = 4r^2\pi\rho\ell^2 f^2 \simeq 71.3\,\mathrm{N}$, $\delta_L = 4\rho\ell^2 f^2/E \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

Zadatak 1.5.6: Stojni valovi zvuka titraju u dvije cijevi s otvorenim krajevima. Duljina prve cijevi je $\ell = 1\ \mathrm{m}$, a druga cijev je za $\Delta\ell = 1\,\mathrm{mm}$ dulja od prve. Odredi frekvenciju udara koji se čuju kada obje cijevi istovremeno proizvode zvuk u osnovnom modu titranja. (brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

Postupak: Titranje zraka u osnovnom modu u cijevi s otvorenim krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ opisujemo funkcijom

$$\xi[x,t] = A\cos[kx]\cos[\omega t]$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = kv_\mathrm{z} = \frac{\pi}{\ell}v_\mathrm{z}.$$

Kad dvije cijevi titraju istovremeno, ukupno titranje koje opažamo u nekoj točki izvan obiju cijevi možemo opisati s

$$\zeta[x,t] = a_1\cos[\omega_1 t + \phi_1] + a_2\cos[\omega_2 t + \phi_2].$$

Uzmemo li $a_1 = a_2 = a$, te zbog jednostavnosti $\phi_1 = \phi_2 = 0$, imamo

$$\zeta[x,t] = 2a\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]\cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right],$$

gdje prepoznajemo udare s kružnom frekvencijom

$$\omega_\mathrm{u} = \omega_1 - \omega_2 = \pi v_\mathrm{z}\left(\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_2}\right) = \pi v_\mathrm{z}\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1\ell_2} = \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell(\ell + \Delta\ell)} \simeq \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Tražena frekvencija je

$$f_\mathrm{u} = \frac{\omega_\mathrm{u}}{2\pi} = \frac{v_\mathrm{z}\Delta\ell}{2\ell^2}.$$

Za zadane vrijednosti $f_\mathrm{u} \simeq 0.170\,\mathrm{Hz}$.

Rješenje: $f_\mathrm{u} = v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell(\ell + \Delta\ell) \simeq v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell^2 \simeq 0.170\ \mathrm{Hz}$

Zadatak 1.5.7: Kada je omjer frekvencija dvaju tonova jednak $\sqrt[12]{2}$ glazbenici kažu da se oni razlikuju za "pola tona". (Jednu "oktavu" čini dvanaest uzastopnih "polutonova", dakle ona odgovara udvostručenju polazne frekvencije.) Odredi od koliko se "polutonova" sastoji prirast frekvencije koji nastupa kada titranje zraka u cijevi s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem iz osnovnog moda pređe u prvi pobuđeni.

Postupak: Duljina cijevi ℓ s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem i valna duljina zvuka λ, kad se radi o titranju u osnovnom modu (1) te u prvom pobuđenom modu (2), zadovoljavaju relacije

$$\ell = \frac{\lambda_1}{4}, \qquad \ell = \frac{3\lambda_2}{4}.$$

Nadalje vrijedi

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2\ell}, \qquad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{3\pi}{2\ell} = 3k_1,$$

te koristeći relaciju

$$\omega = kv$$

slijedi

$$\omega_2 = 3\omega_1.$$

Vidimo da prilikom prelaska u prvi pobuđeni mod titranja dolazi do utrostručenja polazne frekvencije zvuka. Odgovarajući broj polutonova m dobit ćemo s pomoću uvjeta

$$3 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^m = 2^{m/12},$$

iz čega slijedi

$$m = 12 \times \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 19.02.$$

Rješenje: $m = 12 \times \ln 3/\ln 2 \simeq 19.02$

Zadatak 1.5.8: Zvučnik se nalazi na vodoravnom tlu i emitira zvuk frekvencije $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ ravnomjerno u svim smjerovima "gornjeg poluprostora". Odredi snagu zvučnika ako na udaljenosti $r = 30\,\mathrm{m}$ od njega jakost buke iznosi $L_{\mathrm{dB}} = 100\,\mathrm{dB}$. Zatim odredi amplitudu kojom osciliraju čestice zraka te amplitudu oscilacije tlaka zraka na udaljenosti r od izvora. (Za frekvenciju zvuka $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ uzima se da granica čujnosti odgovara intenzitetu $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Gustoća zraka $\rho_{\mathrm{z}} = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, brzina zvuka u zraku $v_{\mathrm{z}} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu definicije jakosti buke, $L_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}[I/I_0]$, gdje je I_0 granica čujnosti, slijedi

$$I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10},$$

što za zadanu vrijednost daje $I = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. S druge strane, intenzitet zvuka definiran je kao omjer srednje snage vala, odnosno njegova izvora, i površine na koju on pada, što je ovdje polusfera polumjera r. Možemo pisati

$$\langle P\rangle = IS = I2r^2\pi,$$

što za zadane vrijednosti daje $\langle P\rangle \simeq 56.5\,\mathrm{W}$. Nadalje, poznati izraz za intenzitet longitudinalnog vala glasi

$$I = \frac{\langle P\rangle}{S} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{z}}\omega^2 A^2 v_{\mathrm{z}} = \frac{(\Delta p)^2_{\mathrm{max}}}{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}},$$

gdje je ρ_{z} gustoća zraka, v_{z} je brzina zvuka u zraku, $\omega = 2\pi f$ je kružna frekvencija vala, A je amplituda oscilacije čestica, a $(\Delta p)_{\mathrm{max}}$ je amplituda titranja tlaka. Slijedi

$$A = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}}},$$

što za zadane vrijednosti daje $A \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Za amplitudu oscilacije tlaka dobivamo

$$(\Delta p)_{\mathrm{max}} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}I},$$

što za zadane vrijednosti daje $(\Delta p)_{\mathrm{max}} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$.

Rješenje: $I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10} = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $\langle P\rangle = 2r^2\pi I \simeq 56.5\,\mathrm{W}$,
$A = (1/\pi f)\sqrt{I/2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}} \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $(\Delta p)_{\mathrm{max}} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}I} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$

Zadatak 1.5.9: Prvi automobil vozi ravnom cestom prema reflektirajućem zidu brzinom iznosa $v_\mathrm{i} = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ svo vrijeme trubeći frekvencijom $f_\mathrm{i} = 250\,\mathrm{Hz}$. Drugi automobil vozi istom cestom ususret prvom automobilu brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Odredi frekvenciju koju čuje vozač drugog automobila kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže izravno od prvog automobila (a) prije njihova mimoilaženja, (b) nakon mimoilaženja, te (c) kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže nakon što se reflektirao od zida. (Brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 1240\,\mathrm{km\,h^{-1}}$)

Postupak: Općenito, frekvencija izvora f_i i frekvencija f_p koju čuje prijamnik slijede relaciju

$$\frac{f_\mathrm{p}}{f_\mathrm{i}} = \frac{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}$ jedinični vektor usmjeren od izvora prema prijamniku, a $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ i $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ su njihove brzine. U slučaju prijema zvuka koji stiže izravno od prvog automobila ovdje imamo

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,\frac{1 \pm v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 \mp v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje gornji predznak odgovara slučaju (a), a donji predznak slučaju (b). U slučaju (c) radi se o zvuku koji stiže nakon reflektiranja od zida pa najprije računamo frekvenciju koju "čuje" zid,

$$f_\mathsf{zid} = \frac{f_\mathrm{i}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

a zatim zid shvaćamo kao izvor frekvencije f_zid. Slijedi da je frekvencija koju čuje vozač drugog automobila

$$f_\mathrm{p} = f_\mathsf{zid}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}) = f_\mathrm{i}\,\frac{1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}}.$$

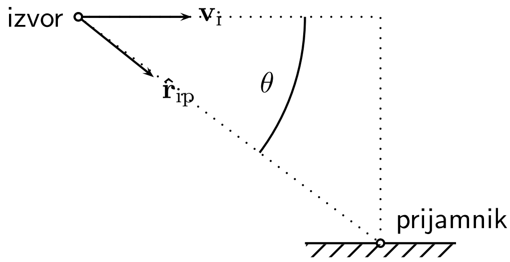
Rješenje: (a) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 + v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 288\,\mathrm{Hz}$, (b) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 + v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 215\,\mathrm{Hz}$, (c) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 237\,\mathrm{Hz}$

Zadatak 1.5.10: Avion leti duž vodoravnog pravca brzinom $v_{\rm i} = 0.8\, v_{\rm z}$, gdje je $v_{\rm z}$ brzina širenja zvuka, i odašilje zvuk frekvencije $f_{\rm i} = 100\,{\rm Hz}$. Izračunaj frekvenciju koju čuje mirni prijamnik na tlu u trenutku kada se avion nalazi točno iznad njega. (Potrebno je uzeti u obzir "kašnjenje" zvuka.)

Postupak: Frekvencija zvuka koju čuje mirni prijamnik dana je izrazom

$$f_{\rm p} = f_{\rm i}\,\frac{v_{\rm z}}{v_{\rm z} - \hat{\mathbf{r}}_{\rm ip}\cdot\mathbf{v}_{\rm i}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip}$ je jedinični vektor koji pokazuje smjer od položaja izvora u trenutku emitiranja prema položaju prijamnika u trenutku prijama, $\mathbf{v}_{\rm i}$ je brzina izvora u trenutku emitiranja, a $v_{\rm z}$ je iznos brzine zvuka. Zadanu situaciju prikazujemo skicom:



U pravokutnom trokutu na skici, omjer duljine vodoravne katete i duljine hipotenuze jednak je $v_{\rm i}/v_{\rm z}$, jer u istom vremenu avion prevaljuje duljinu katete, dok zvuk prevaljuje duljinu hipotenuze. Možemo pisati

$$\cos\theta = v_{\rm i}/v_{\rm z},$$

odnosno skalarni produkt $\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip}\cdot\mathbf{v}_{\rm i}$ možemo napisati kao

$$\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip}\cdot\mathbf{v}_{\rm i} = v_{\rm i}\cos\theta = v_{\rm i}^2/v_{\rm p}.$$

Slijedi

$$f_{\rm p} = \frac{f_{\rm i}}{1-(v_{\rm i}/v_{\rm z})^2}.$$

Za zadani omjer $v_{\rm i}/v_{\rm z}$ dobivamo $f_{\rm p} \simeq 278\,{\rm Hz}$.

Rješenje: $f_{\rm p} = f_{\rm i}/(1-(v_{\rm i}/v_{\rm z})^2) \simeq 278\,{\rm Hz}$

Zadatak 1.5.11: Izvor koji proizvodi zvuk frekvencije f i prijamnik se nalaze u istoj točki do trenutka $t = 0$ u kojem se izvor počninje gibati ubrzavajući duž pravca akceleracijom stalnog iznosa a, dok prijamnik i dalje miruje. Odredi frekvenciju koju čuje prijamnik u trenutku $t > 0$.

Postupak: Općenito, kada izvor koji se giba brzinom $\mathbf{v}_i$ odašilje zvuk frekvencije f_i, mirni prijamnik čuje zvuk frekvencije

$$f_{\mathrm{p}} = \frac{f_{\mathrm{i}}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{ip}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{i}})/v_{\mathrm{z}}},$$

gdje je v_{z} iznos brzine zvuka, a $\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{ip}}$ je jedinični vektor usmjeren od točke odašiljanja prema prijemniku. U ovom slučaju, u trenutku $t > 0$ prijamnik čuje zvuk emitiran u ranijem trenutku t' (vrijedi $0 < t' < t$) u kojem su iznos brzine izvora i njegova udaljenost od prijamnika dani s

$$v(t') = at', \qquad x(t') = \frac{a}{2}t'^2.$$

Vrijeme t nakon kojeg odaslani zvuk stiže do prijamnika jest zbroj vremena t' koliko je izvor putovao i vremena $x(t')/v_{\mathrm{z}}$ koliko je zvuku trebalo da stigne do prijamnika, dakle vrijedi relacija

$$t = t' + x(t')/v_{\mathrm{z}}.$$

Rješavanjem po t' dobivamo

$$t'_{1,2} = \frac{v_{\mathrm{z}}}{a}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}\right),$$

gdje odabiremo pozitivno rješenje, tj. ono s pozitivnim predznakom ispred korijena. Brzina izvora u trenutku t' je

$$v(t') = v_{\mathrm{z}}\left(-1 + \sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}\right).$$

Konačno, frekvencija koju čuje mirni prijamnik u trenutku t je

$$f_{\mathrm{p}}(t) = \frac{f_{\mathrm{i}}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{ip}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{i}}(t'))/v_{\mathrm{z}}} = \frac{f_{\mathrm{i}}}{1 + v(t')/v_{\mathrm{z}}} = \frac{f_{\mathrm{i}}}{\sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}}.$$

Rješenje: $f_{\mathrm{p}}(t) = f_{\mathrm{i}}/\sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}$

2 DRUGI CIKLUS

2.1 Specijalna teorija relativnosti

Zadatak 2.1.1: Odredi iznos brzine i količine gibanja elektrona ubrzanog iz mirovanja razlikom električnog potencijala $U = 500\,\mathrm{kV}$. (Masa elektrona $m = 511\,\mathrm{keV}\,c^{-2}$.)

Postupak: Prolaskom kroz razliku potencijala U električna sila je ubrzavajući česticu mase m i naboja q obavila je rad $W = qU$ koji je, prema teoremu o radu i kinetičkoj energiji, jednak promjeni kinetičke energije čestice. S obzirom da je početna kinetička energija jednaka nuli imamo

$$W = q\,U = K = E - mc^2,$$

gdje je E relativistička energija čestice, a mc^2 je njena energija mirovanja. Koristeći izraz za relativističku energiju

$$E = \gamma mc^2, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c},$$

slijedi

$$\gamma = 1 + \frac{qU}{mc^2}, \qquad \beta^2 = 1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + qU}\right)^2,$$

odnosno

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{mc^2 + qU}\right)^2}.$$

Količinu gibanja možemo računati na osnovu relativističkog izraza $p = \gamma m v$, ili jednostavnije s pomoću opće relacije

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2,$$

iz koje dobivamo

$$p = \frac{qU}{c}\sqrt{1 + \frac{2mc^2}{qU}}.$$

Za elektron $q = e$ (elementarni naboj), te za zadane vrijednosti

$$v = 0.8629\,c, \qquad p = 872.3\,\mathrm{keV}\,c^{-1}.$$

Rješenje: $v = 0.8629\,c$, $p = 872.3\,\mathrm{keV}\,c^{-1}$

Zadatak 2.1.2: Putnička agencija oglasila je putovanje do zvijezde udaljene deset godina svjetlosti (D) koje za putnike prema njihovu vlastitu vremenu traje samo pet godina ($\Delta t'$). Odredi brzinu svemirskog broda s kojim bi se takvo putovanje moglo ostvariti.

Postupak: Neka je $\mathcal{S}$ referentni sustav u kojem polazište i odredište miruju, a $\mathcal{S}'$ neka je sustav vezan uz brod koji se u odnosu na $\mathcal{S}$ giba brzinom iznosa v. Koordinate polaska broda u sustavu $\mathcal{S}$ možemo napisati kao

$$x_0 = 0, \qquad t_0 = 0,$$

dok koordinate dolaska broda u odredište možemo napisati kao

$$x_1 = D, \qquad t_1 = \frac{D}{v},$$

gdje je D udaljenost između polazišta i odredišta. Koordinate tih događaja možemo napisati u sustavu $\mathcal{S}'$ s pomoću Lorenzovih transformacija,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Koordinate polaska u sustavu $\mathcal{S}'$ su

$$x'_0 = 0, \qquad t'_0 = 0,$$

dok su koordinate dolaska u odredište

$$x'_1 = 0, \qquad t'_1 = \frac{D}{v}\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Prema vremenu u sustavu $\mathcal{S}'$ trajanje putovanja je

$$\Delta t' = t'_1 - t'_0 = \frac{D}{v}\sqrt{1 - (v/c)^2},$$

što odgovara vlastitu vremenu putnika koji u tom sustavu miruje, odnosno trajanju putovanja kako je oglašeno. Slijedi da relativna brzina sustava $\mathcal{S}'$ u odnosu na sustav $\mathcal{S}$, odnosno brzina broda, mora biti

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{c\Delta t'}{D}\right)^2}}.$$

Za zadane vrijednosti $D = 10\,\mathrm{god}\,c$, $\Delta t' = 5\,\mathrm{god}$, dobivamo $v \simeq 0.894\,c$.

Rješenje: $v = c/\sqrt{1 + (c\,\Delta t'/D)^2} \simeq 0.894\,c$

Zadatak 2.1.3: U nekom se referentnom sustavu dva svemirska broda gibaju brzinama jednakih iznosa $v = 0.75\,c$, ali duž međusobno okomitih pravaca. Odredi iznos relativne brzine jednog broda u odnosu na drugi, odnosno, iznos brzine jednog broda u referentnom sustavu u kojem onaj drugi miruje.

Postupak: U referentnom sustavu $\mathcal{S}$ u kojem je gibanje opisano komponente vektora brzine prvog broda možemo napisati kao

$$u_{1x} = v, \qquad u_{1y} = u_{1z} = 0,$$

dok za drugi brod pišemo

$$u_{2x} = 0, \qquad u_{2y} = v, \qquad u_{2z} = 0.$$

Uvedemo li sustav $\mathcal{S}'$ koji se giba s prvim brodom, dakle brzinom iznosa v u smjeru x-osi, komponente vektora brzine ćemo dobiti s pomoću transformacija

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}, \qquad u'_{y,z} = \frac{u_{y,z}\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2}.$$

Za prvi brod slijedi $u'_{1x} = u'_{1y} = u'_{1z} = 0$, a za drugi imamo

$$u'_{2x} = -v, \qquad u'_{2y} = v\sqrt{1-(v/c)^2}, \qquad u'_{2z} = 0.$$

Iznos brzine drugog broda u sustavu $\mathcal{S}'$ je

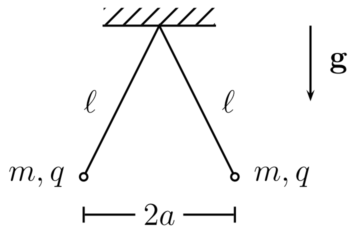
$$u'_2 = \sqrt{(u'_{2x})^2 + (u'_{2y})^2 + (u'_{2z})^2} = v\,\sqrt{2-(v/c)^2}.$$

Za zadane vrijednosti $u'_2 \simeq 0.899\,c$.

Rješenje: $u'_2 = v\,\sqrt{2-(v/c)^2} \simeq 0.899\,c$

2.2 Uvod u elektromagnetizam

Zadatak 2.2.1: Dvije metalne kuglice od kojih svaka ima masu $m = 10\,\mathrm{g}$ ovješene su jedna tik do druge o nevodljive niti duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$. Dovedemo li na kuglice ukupan naboj $2q$ koji se među njima ravnomjerno rasporedi, one će se zbog elektrostatskog odbijanja razmaknuti (vidi sliku). Odredi naboj q ako razmak među kuglicama iznosi $2a = 20\,\mathrm{cm}$ i izrazi ga u jedinicama elementarnog naboja q_e. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, elementarni naboj $q_\mathrm{e} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)



Postupak: Neka je x-os vodoravna i usmjerena prema desno, a y-os neka je uspravna i usmjerena uvis. Na svaku od kuglica djeluje napetost niti,

$$\mathbf{T} = T(\pm \sin\alpha\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\alpha\, \hat{\mathbf{y}}),$$

gdje je α kut otklona niti, a izbor predznaka x-komponente ovisi o tome promatramo li lijevu ili desnu kuglicu. Na kuglice također djeluje odbojna elektrostatska sila,

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \mp F_\mathrm{e}\, \hat{\mathbf{x}}, \qquad F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2},$$

gdje ponovo izbor predznaka ovisi o tome promatramo li lijevu ili densu kuglicu, te s gravitacijska sila

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = -mg\, \hat{\mathbf{y}}.$$

Uvjet ravnoteže kuglica možemo napisati kao

$$0 = T(\pm \sin\alpha\, \hat{\mathbf{x}} + \cos\alpha\, \hat{\mathbf{y}}) \mp F_\mathrm{e}\, \hat{\mathbf{x}} - G\, \hat{\mathbf{y}},$$

odnosno, raspisano po komponentama

$$F_\mathrm{e} = T \sin\alpha, \qquad G = T\cos\alpha.$$

Dijeljenjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$\tan\alpha = \frac{F_\mathrm{e}}{G},$$

dok iz geometrije imamo

$$\tan\alpha = \frac{a}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}.$$

Eliminacijom $\tan\alpha$ iz gornjih dviju jednadžbi te korištenjem izraza za F_e i G, slijedi

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0\, mg\, \frac{4a^3}{\sqrt{\ell^2 - a^2}},$$

odnosno,

$$q = \pm 4a^{3/2} \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}},$$

gdje predznak naboja q ostaje neodređen. Za zadane vrijednosti m, ℓ i a dobije se $q \simeq \pm 2.095 \times 10^{-7}\,\mathrm{C} \simeq \pm 1.308 \times 10^{12}\, q_\mathrm{e}$.

Rješenje: $q = \pm 4a^{3/2} \sqrt{\pi\epsilon_0\, mg/\sqrt{\ell^2 - a^2}} \simeq \pm 1.308 \times 10^{12}\, q_\mathrm{e}$

Zadatak 2.2.2: Dvije čestice naboja q učvršćene su na x-osi pri koordinatama $x_{1,2} = \pm a$. Odredi frekvenciju kojom bi oko ravnotežnog položaja $x = y = 0$ titrala čestica mase m i naboja q, ako je njeno gibanje ograničeno na x-os. Zatim odredi frekvenciju kojom bi duž y-osi, oko istog ravnotežnog položaja, titrala čestica mase m i naboja $-q$. (Pretpostavlja se male oscilacije i koristiti se razvoj $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$.)

Postupak: Čestice mase m i naboja $\pm q$ gibaju se pod djelovanjem električne sile $\mathbf{F} = \pm q\mathbf{E}$. Električno polje $\mathbf{E}$ dvaju naboja q učvršćenih pri $\mathbf{r}_{1,2} = \pm a\,\hat{\mathbf{x}}$ možemo u točki $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}$ napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(x-a)\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}}{|(x-a)\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}|^3} + \frac{(x+a)\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}}{|(x+a)\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}|^3}\right)$$

Za gibanje naboja q duž x-osi odgovorna je x-komponenta električne sile. Uvrstimo li $y = 0$ u gornji izraz za električno polje, kao x-komponentu dobivamo

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} + \frac{x+a}{|x+a|^3}\right).$$

S obzirom da razmatramo male oscilacije, vrijedi $|x| \ll a$, odnosno $|a \pm x| = a \pm x$, te možemo pisati

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-(a-x)^{-2} + (a+x)^{-2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-(1-x/a)^{-2} + (1+x/a)^{-2}\right) \simeq -\frac{qx}{\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo u poslijednjem koraku koristili razvoj $(1\pm\epsilon)^{-2} \simeq 1 \mp 2\epsilon$. Jednadžbu gibanja čestice naboja q i mase m sada možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = F_x = qE_x = -\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3}\,x,$$

odnosno $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, gdje prepoznajemo jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Za gibanje naboja $-q$ duž y-osi odgovorna je y-komponenta električnoe sile. Uz $x = 0$ dobivamo

$$E_y[y] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{y}{|-a\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}|^3} + \frac{y}{|a\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}}|^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2y}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3}\frac{1}{(1+(y/a)^2)^{3/2}} \simeq \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo, s obzirom da je pri malim oscilacijama vrijedi $|y| \ll a$, koristili razvoj $(1+\epsilon)^{-3/2} \simeq 1 - (3/2)\epsilon$. Jednadžbu gibanja pišemo kao

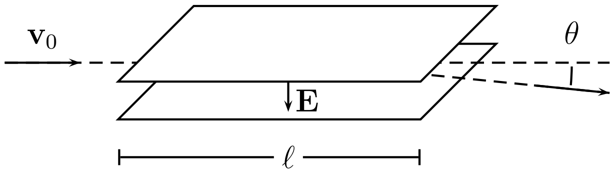
$$m\ddot{y} = F_y = -qE_y = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3}\,y,$$

odnosno $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, gdje je frekvencija titranja

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Rješenje: Titranje q duž x-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{\pi\epsilon_0 a^3 m}$, titranje $-q$ duž y-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{2\pi\epsilon_0 a^3 m}$

Zadatak 2.2.3: Čestica mase m i naboja q ulijeće brzinom iznosa v_0 među paralelne ploče nabijenog kondenzatora. Prvobitan smjer gibanja čestice paralelan je s pločama, a duljina ploča u tom smjeru je ℓ (vidi sliku). Odredi kut otklona smjera gibanja čestice do kojeg dolazi uslijed prolaska kroz kondenzator ako je jakost homogenog električnog polja među pločama E. (Pretpostavljamo da čestica nije udarila u ploču kondenzatora.)



Postupak: Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da je ishodište u točki u kojoj čestica ulazi u kondenzator, orijentacija x-osi neka je podudarna s prvobitnim smjerom gibanja čestice, a y-os neka ima smjer obrnut u odnosu na smjer električnog polja. Jednadžba gibanja nabijene čestice u električnom polju, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = q\mathbf{E}$, ovdje glasi

$$m\big(\ddot{x}[t]\,\hat{\mathbf{x}} + \ddot{y}[t]\,\hat{\mathbf{y}}\big) = -qE\,\hat{\mathbf{y}}.$$

Uz pokratu

$$\gamma = qE/m$$

jednadžba gibanja svodi se na

$$\ddot{x}[t] = 0, \qquad \ddot{y}[t] = -\gamma,$$

što je podudarno s uobičajenim opisom gibanja čestice u homogenom polju gravitacijske sile ubrzanja $g = \gamma$. Integracijom jednadžbi gibanja uz početne uvjete u $t = 0$,

$$x[0] = y[0] = 0, \qquad \dot{x}[0] = v_0, \quad \dot{y}[0] = 0,$$

slijedi

$$x[t] = v_0 t, \qquad y[t] = -\frac{\gamma}{2}t^2,$$

što pak odgovara tzv. horizontalnom hitcu u homogenom polju gravitacijske sile. Čestica napušta kondenzator u trenutku $t = \tau$ u kojem vrijedi $x[\tau] = \ell$, odnosno

$$\tau = \ell/v_0.$$

Kut otkona slijedi iz

$$\tan\theta = -\frac{\dot{y}[\tau]}{\dot{x}[\tau]} = \frac{\gamma\tau}{v_0} = \frac{qE\ell}{mv_0^2}.$$

Rješenje: $\tan\theta = qE\ell/mv_0^2$

Zadatak 2.2.4: Čestica mase m i naboja q se slobodno giba kroz prostor u kojem nije prisutno elektromagnetsko polje. U trenutku $t = 0$ uključuje se homogeno magnetsko polje jakosti B i smjera okomitog na brzinu čestice, a u trenutku $t = \tau$ polje se gasi. Odredi otklon pravca gibanja čestice koji je nastupio uslijed prisutnosti magnetskog polja u tom vremenskom intervalu.

Postupak: Prije uključenja i nakon gašenja nagnetskog polja čestica se giba jednoliko pravocrtno, dok u vremenskom intervalu u kojem je prisutno polje $\mathbf{B}$ na nju djeluje magnetska komponenta Lorentzove sile,

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

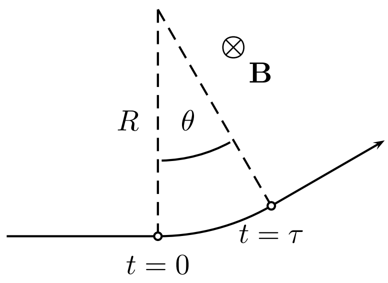
gdje je $\mathbf{v}$ brzina čestice. S obzirom da je početna brzina $\mathbf{v}$ okomita na $\mathbf{B}$, te da je $\mathbf{F}$ uvijek okomita na $\mathbf{B}$, slijedi da se gibanje odvija u ravnini okomitoj na $\mathbf{B}$. Nadalje, s obzirom da je $\mathbf{F}$ okomita na $\mathbf{v}$, slijedi da ona ima ulogu centripetalne sile koja mijenja smjer brzine $\mathbf{v}$, ali ne i njen iznos v. Iz svega navedenog slijedi da je riječ o gibanju u ravnini pod utjecajem centripetalne sile stalnog iznosa

$$F = |q|vB.$$

Takvoj sili odgovara kružno gibanje pri čemu vrijedi

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

gdje je R polumjer putanje. Na skici koja slijedi smjer polja $\mathbf{B}$ je postavljen u skladu s pretpostavkom $q > 0$:



Kutnu brzinu ω možemo, na osnovu gornjih izraza za silu, napisati kao

$$\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m},$$

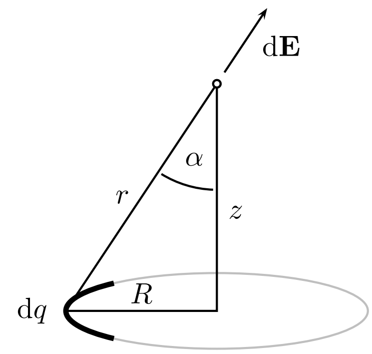
te kut otklona koji nastupa u vremenskom intervalu τ možemo napisati kao

$$\theta = \omega\tau = \frac{|q|B\tau}{m}.$$

Rješenje: $\theta = |q|B\tau/m$

Zadatak 2.2.5: Električni naboj jednoliko je raspoređen duž tankog obruča polumjera R. Odredi udaljenost od središta obruča onih točaka na njegovoj osi u kojima je jakost električnog polja najveća.

Postupak: Zadatak se može riješiti izravnim računanjem jakosti električnog polja u točkama na njegovoj osi.



Element naboja $\mathrm{d}q$ na obruču doprinosi električnom polju $\mathbf{E}$ u točki udaljenoj z od središta obruča elementom polja $\mathrm{d}\mathbf{E}$ čija je jakost

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}.$$

Zbog simetrije je očigledno da je ukupno polje $\mathbf{E} = \int \mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjereno duž osi obruža (komponente $\mathrm{d}\mathbf{E}$ okomite na os se poništavaju). Stoga nas zanima isključivo komponenta $\mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjerena duž osi obruča. Njen iznos možemo napisati kao

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\,\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}q,$$

gdje smo koristili $\cos\alpha = z/r$ te $r^2 = R^2 + z^2$. Integracijom preko čitavog obruča

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

gdje je q ukupan naboj. Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_z[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Očigledno je da se radi o maksimumu jakosti polja jer električno polje iščezava u središtu prstena (zbog simetrije), kao i pri beskonačnoj udaljenosti.

Umjesto izravnom integracijom, jakost električnog polja može se odrediti i preko elektrostatskog potencijala U kao $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}U$. Neka je z-os podudarna s osi simetrije obruča i neka $z = 0$ odgovara njegovu središtu. Za točke na z-osi elektrostatski potencijal možemo napisati kao

$$U[z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

z-komponenta električnog polja sada je

$$E_z[z] = -\frac{\partial}{\partial z}U[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

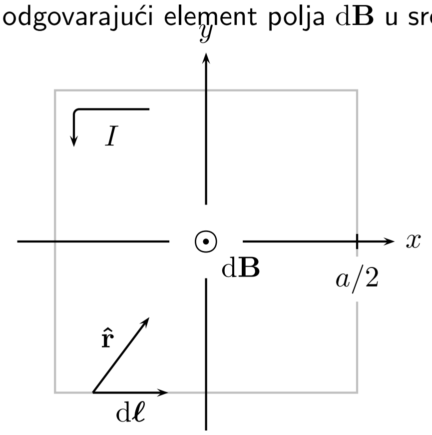
Rješenje: $z = R/\sqrt{2}$

Zadatak 2.2.6: Kvadratičnom petljom čija stranica ima duljinu $a = 10\,\mathrm{cm}$ teče struja jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Primjenom Biot–Savartova pravila odredi jakost magnetskog polja B u sredini petlje. (Koristi se integral $\int (x^2+c^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = xc^{-2}(x^2+c^2)^{-1/2}$, permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-1}}$.)

Postupak: Prema Biot–Savartovu pravilu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja jakosti I doprinosi magnetskom polju u točki čiji je položaj u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan vektorom $\mathbf{r}$ kao

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

gdje je $r = |\mathbf{r}|$ udaljenost, a $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor. Skica prikazuje zadanu kvadratnu petlju smještenu u x,y-ravninu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, te odgovarajući element polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u središtu kvadrata i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$,



Element stranice kvadrata pri $y = -a/2$ (donja stranica na slici) možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Vektor položaja točke u kojoj računamo polje u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ je $\mathbf{r} = -x\,\hat{\mathbf{x}} + (a/2)\,\hat{\mathbf{y}}$ te udaljenost r i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$ pišemo kao

$$r = \sqrt{x^2 + (a/2)^2}, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{-x\,\hat{\mathbf{x}} + (a/2)\,\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2 + (a/2)^2}}.$$

Slijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a/2}{(x^2 + (a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

Doprinos čitave stranice kvadrata dobivamo integracijom,

$$\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{x=-a/2}^{a/2} \frac{a/2}{(x^2 + (a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{\mu_0 I}{\pi a\sqrt{2}}\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Konačno, s obzirom da sve četiri stranice kvadrata na jednak način doprinose polju u središtu kvadrata, ukupno polje dobivamo množenjem gornjeg izraza s četiri. Tražena jakost magnetskog polja je

$$B = 2\sqrt{2}\,\frac{\mu_0 I}{\pi a}.$$

Za zadane vrijednosti a i I dobivamo $B \simeq 1.132 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

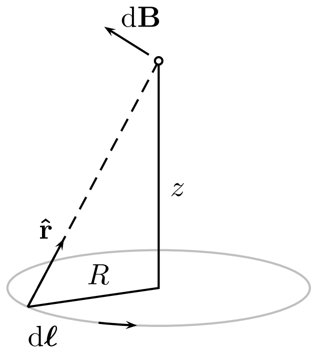
Rješenje: $B = 2\sqrt{2}\,\mu_0 I/\pi a \simeq 1.132 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$

Zadatak 2.2.7: Kružnom petljom teče električna struja stalne jakosti. Odredi polumjer petlje s kojim se postiže najveća jakost magnetskog polja u točki na osi petlje koja je udaljena z od središta petlje.

Postupak: Element magnetskog polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u točki čiji je položaj u odnosu na element struje $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan s $\mathbf{r}$ opisan je Biot–Savartovim zakonom,

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

($r = |\mathbf{r}|$ je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor). Ovdje je $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ element kružnice polumjera R,



Na osnovu simetrije zaključujemo da je polje $\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B}$ u točkama na osi petlje usmjereno duž same osi. Stoga je dovoljno integrirati uzdužnu komponentu $\mathrm{d}\mathbf{B}$ koju možemo napisati kao

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\ell,$$

gdje je ϕ kut što ga $\hat{\mathbf{r}}$ zatvara s osi petlje, a zatim smo koristili $r = \sqrt{z^2+R^2}$ i $\sin\phi = R/r$. Integracijom po čitavoj petlji, uz $\int \mathrm{d}\ell = 2R\pi$, slijedi

$$B = B_z = \int \mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

Polumjer petlje R koji će dati najveći B za danu udaljenost z i jakost struje I dobivamo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}B = \cdots = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R(2z^2-R^2)}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je izpunjen za

$$R = \sqrt{2}z.$$

Rješenje: $R = \sqrt{2}z$

Zadatak 2.2.8: Duž pravca kojim teče struja stalne jakosti I također je raspoređen naboj linijske gustoće λ. Odredi iznos brzine kojom se usporedno s tim pravcem mora gibati nabijena čestica kako bi elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu iščezla.

Postupak: Elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu naboja q koja se giba brzinom $\mathbf{v}$ u polju $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ dana je izrazom $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ te iščezava ako vrijedi

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0.$$

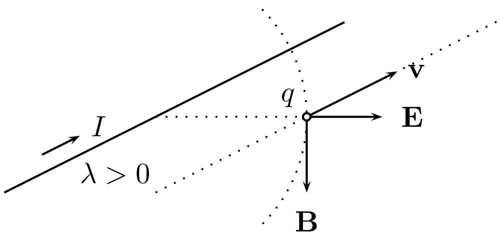
Električno polje naboja linijske gustoće λ raspoređenog po beskonačnom pravcu ima iznos

$$E[r] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

gdje je r udaljenost od pravca, a za $\lambda > 0$ je usjereno "radijalno prema van" u odnosu na pravac (taj rezultat slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Magnetsko polje struje stvoreno strujom I koja teče beskonačnim pravcem ima jakost

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

a smjer je određen "pravilom desne ruke" (rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). U ovom slučaju, pretpostavimo li da je pravac pozitivno nabijen te da struja teče u naznačenom smjeru, smjerove polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ možemo prikazati slikom:



Pretpostavimo li da se nabijena čestica giba u smjeru naznačenom na slici, s obzirom da su vektori $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{v}$ međusobno okomiti, uvjet za iščezavanje elektromagnetske sile se svodi na

$$E = vB,$$

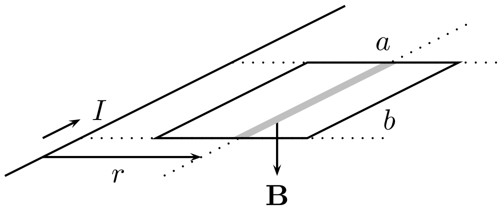
gdje su E, B i v iznosi tih vektora. Slijedi

$$v = \frac{E}{B} = \frac{\lambda c^2}{I}.$$

Rješenje: $v = \lambda c^2 / I$

Zadatak 2.2.9: Pravokutnik sa stranicama duljine $a = 2\,\mathrm{cm}$ i $b = 3\,\mathrm{cm}$ i beskonačni ravni vodič duž kojeg teče stalna struja jakosti $I = 5\,\mathrm{A}$ nalaze se u istoj ravnini. Vodiču je najbliža stranica pravokutnika duljine b, paralelna je s njim i nalazi se na udaljenosti $d = 1\,\mathrm{cm}$ od njega. Odredi tok magnetskog polja kroz prevokutnik. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Vodič i kvadrat prikazujemo skicom:



Magnetsko polje okomito je na ravninu u kojoj leže vodič i petlja, a jakost polja ovisi o udaljenosti od vodiča r kao

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(gornji rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). Element toka magnetskog polja kroz plohu može se napisati kao

$$\mathrm{d}\Phi_B = B\,\mathrm{d}S,$$

gdje je $\mathrm{d}S$ element površine. Njega ovdje ovdje odabiremo kao vrpcu širine $\mathrm{d}r$ na udaljenosti r od vodiča (vrpca sive boje na gornjoj skici). Element toka sada je

$$\mathrm{d}\Phi_B = B[r]\,b\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r,$$

a integracijom preko čitavog pravolutnika slijedi

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left[\frac{d+a}{d}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b, d i I dobivamo $\Phi_B \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$.

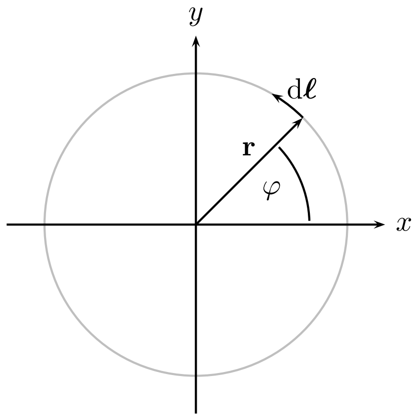
Rješenje: $\Phi_B = (\mu_0 I b/2\pi)\ln[(d+a)/d] \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$

Zadatak 2.2.10: Odredi moment elektromagnetske sile koja djeluje na kružnu petlju polumjera R kojom teče struja jakosti I kada se ona nalazi u homogenom magnetskom polju jakosti B i smjera koji zatvara kut θ s okomicom na ravninu petlje.

Postupak: Element sile koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u magnetskom polju $\mathbf{B}$ može se općenito napisati kao

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \mathrm{d}q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{B}\right) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}.$$

Zadanu kružnu petlju ćemo smjestiti u ravninu $z=0$ kao što prikazuje slika:



Položaj elementa petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ možemo napisati kao

$$\mathbf{r} = R\,(\hat{\mathbf{x}}\,\cos\varphi + \hat{\mathbf{y}}\,\sin\varphi),$$

gdje je φ kutna koordinata, dok sam element krivulje možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = R\,\mathrm{d}\varphi\,(-\hat{\mathbf{x}}\,\sin\varphi + \hat{\mathbf{y}}\,\cos\varphi).$$

Magnetsko polje koje zatvara kut θ sa z-osi možemo napisati kao

$$\mathbf{B} = B\,(\hat{\mathbf{x}}\,\sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\,\cos\theta).$$

Element momenta sile (u odnosu na ishodište) sada možemo napisati kao

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{r}\times(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\,I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} - (\mathbf{r}\cdot I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\,\mathbf{B}\\ &= R^2IB\,\mathrm{d}\varphi\,(-\hat{\mathbf{x}}\,\cos\theta\,\cos\varphi\sin\varphi + \hat{\mathbf{y}}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi)\\ &= R^2IB\,\mathrm{d}\varphi\,\left(-\hat{\mathbf{x}}\,\cos\theta\,\frac{\sin2\varphi}{2} + \hat{\mathbf{y}}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi\right),\end{aligned}$$

gdje smo najprije koristili opći vektorski identitet $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$, a zatim gornje izraze za $\mathbf{r}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ i $\mathbf{B}$. Moment elektromagnetske sile slijedi integracijom gornjeg izraza preko čitave petlje. Očigledno je da će integral x-komponente biti jednak nuli jer se radi o oscilatornoj funkciji, dok je integral y-komponente također očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na njenom punom periodu jednaka $1/2$. Slijedi

$$\mathbf{M} = \int\mathrm{d}\mathbf{M} = \hat{\mathbf{y}}\,R^2\pi IB\,\sin\theta.$$

Rješenje: $M = R^2\pi IB\,\sin\theta$

2.3 Gaussovi zakoni

Zadatak 2.3.1: Električno polje opisano je izrazom

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

gdje je $\mathbf{r}$ položaj točke u prostoru u odnosu na točku $\mathcal{O}$ (ishodište), r je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}}$ je jedinični vektor, a E_0 i $r_0 > 0$ su konstante. Odredi količinu električnog naboja sadržanu unutar sfere polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$ te volumnu gustoću električnog naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$.

Postupak: Prema Gaussovu zakonu za električno polje, količina naboja q unutar zatvorene plohe S razmjrena je toku električnog polja $\mathbf{E}$ kroz S,

$$q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Kao S ovdje odabiremo sfernu plohu polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$. S obzirom da je zadano polje $\mathbf{E}$ svugdje okomito na tako odabranu plohu te da je svugdje na njoj jednakog iznosa, tok $\mathbf{E}$ kroz S jednak je produktu jakosti polja i ukupne površine plohe. Slijedi

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

odnosno,

$$q[r] = \begin{cases} 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Volumnu gustoću naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$ dobit ćemo iz omjera naboja sadržanog između dviju sfernih ljuski čiji su polumjeri r i $r + \mathrm{d}r$ i volumena prostora među tim ljuskama,

$$\rho[r] = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \frac{q[r+\mathrm{d}r] - q[r]}{4\pi r^2\,\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}q[r].$$

Slijedi

$$\rho[r] = \begin{cases} 3\epsilon_0 E_0/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 0 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Prepoznajemo da je riječ o homogenoj raspodjeli naboja unutar sfere polumjera r_0 te o vakuumu izvan nje.

Gustoću naboja se također može odrediti iz Maxwellove jednadžbe, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. U pravokutnim koordinatama, pišući $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$, unutar sfere polumjera $\mathbf{r}_0$ imamo

$$\rho = \epsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0\left(\hat{\mathbf{x}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \hat{\mathbf{y}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \hat{\mathbf{z}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(\frac{E_0}{r_0}\,(\hat{\mathbf{x}}\,x + \hat{\mathbf{y}}\,y + \hat{\mathbf{z}}\,z)\right) = \cdots = \frac{3\epsilon E_0}{r_0},$$

dok izvan nje imamo

$$\rho = \epsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0\left(\hat{\mathbf{x}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \hat{\mathbf{y}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \hat{\mathbf{z}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(E_0 r_0^2\frac{\hat{\mathbf{x}}\,x + \hat{\mathbf{y}}\,y + \hat{\mathbf{z}}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \cdots = 0.$$

Rješenje: Za $r \le r_0$: $q[r] = 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0$, $\rho[r] = 3\epsilon_0 E_0/r_0$, za $r > r_0$: $q = 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2$, $\rho = 0$

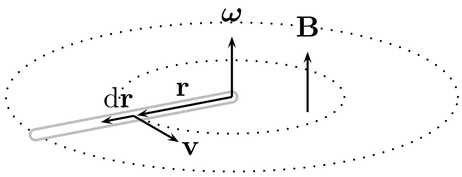
2.4 Faradayev i Ampère–Maxwellov zakon

Zadatak 2.4.1: Tanki vodljivi štap duljine ℓ okreće se oko svog kraja kutnom brzinom ω u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Odredi iznos inducirane elektromotorne sile na krajevima štapa.

Postupak: Elektromotorna sila je krivuljni integral sile koja djeluje na jedinični naboj,

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell},$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Električno polje $\mathbf{E}$ u ovom slučaju nije prisutno, a odnos brzine elementa štapa $\mathbf{v}$ i magnetskog polja $\mathbf{B}$ prikazujemo slikom:



Vektor $\mathbf{r}$ pokazuje položaj elementa štapa u odnosu na os vrtnje. Brzinu elementa štapa može se napisati kao $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, a sam element kao $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathrm{d}\mathbf{r}$. Slijedi da možemo pisati

$$\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Koristeći opći identitet $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ te uzimajući u obzir da su $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\omega}$ paralelni, dok su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{r}$ okomiti, vektorski produkt iz gornjeg izraza za elektromotornu silu možemo raspisati kao

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} = B\omega\mathbf{r}.$$

Konačno

$$\mathcal{E} = \int B\omega\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = B\omega \int_0^\ell r\,\mathrm{d}r = \frac{B\omega\ell^2}{2}.$$

Zadatak se može riješiti i primjenom Faradayeva zakona indukcije prema kojemu je elektromotorna sila inducirana u zatvorenoj petlji jednaka vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz plohu omeđenu tom petljom. Ovdje uočavamo da krivulja koju razmatramo (štap) nije zatvorena, dakle ona ne omeđuje plohu, no moguć je sljedeći pristup. Kod homogenog i u vremenu stalnog polja jakosti B koje je okomito na plohu površine S možemo pisati

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS) = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}.$$

S obzirom da kraj štapa u vremenu $\mathrm{d}t$ napravi pomak $\ell\omega\,\mathrm{d}t$, površina koju štap prebriše jednaka je površini pravokutnog trokuta s katetama ℓ i $\ell\omega\,\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\ell^2\omega\,\mathrm{d}t.$$

Slijedi $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$, kao i ranije.

Rješenje: $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$

Zadatak 2.4.2: Vodljiva žica duljine $L = 1\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$. Odredi amplitudu elektromotorne sile koja se inducira u toj žici kada na njoj titra stojni val amplitude $A = 1\,\mathrm{cm}$ u n-tom modu, a titranje se odvija u ravnini koja je okomita na homogeno magnetsko polje jakosti $B = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Postupak: Elektromotorna sila je definirana izrazom

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, a $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ su električno i magnetsko polje. U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, a $\mathbf{v}$ je brzina kojom se žica giba pri titranju. Pravokutni koordinatni sustav postavljamo tako da žica leži na x-osi s krajevima pri $x = 0$ i $x = L$, te uzimamo da se titranje stojnog vala odvija u $z = 0$ ravnini. Otklon žice od ravnotežnog položaja opisujemo valnom funkcijom

$$y[x,t] = A\,\sin[n\pi x/L]\,\sin[n\omega_1 t + \phi]$$

gdje $n = 1, 2, \ldots$ odgovara različitim modovima titranja, a ϕ je općenit pomak u fazi. Takvom titranju odgovara brzina

$$\mathbf{v}[x,t] = \dot{y}[x,t]\,\hat{\mathbf{y}} = An\omega_1\,\sin[n\pi x/L]\,\cos[n\omega_1 t + \phi]\,\hat{\mathbf{y}}.$$

Homogeno magnetsko polje je okomito na ravninu titranja pa pišemo

$$\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \int_{x=0}^{L} \big((An\omega_1\,\sin[n\pi x/L]\,\cos[n\omega_1 t + \phi]\,\hat{\mathbf{y}}) \times (B\,\hat{\mathbf{z}})\big) \cdot (\hat{\mathbf{x}}\,\mathrm{d}x) \\
&= ABn\omega_1 \cos[n\omega_1 t + \phi] \int_0^L \sin[n\pi x/L]\,\mathrm{d}x \\
&= ABn\omega_1\,\frac{L}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\,\cos[n\omega_1 t + \phi].
\end{aligned}$$

Pišući $\cos n\pi = (-1)^n$, elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n\,\cos(n\omega_1 t + \phi),$$

gdje je

$$\mathcal{E}_n = \frac{AB\omega_1 L}{\pi}(1 - (-1)^n)$$

amplituda elektromotorne sile pri titranju žice u n-tom modu. Važno je uočiti da ona iščezava za parne modove titranja. Za neparne modove, te za zadane vrijednosti parametara, amplituda elektromotorne sile je

$$\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = \frac{2AB\omega_1 L}{\pi} = 4ABf_1 L \simeq 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}.$$

Rješenje: $\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = 4ABf_1 L = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}$, $\mathcal{E}_{2,4,\ldots} = 0$

Zadatak 2.4.3: Homogeno ali o vremenu ovisno magnetsko polje ima stalan iznos B_0 te smjer koji leži u ravnini $z = 0$ i jednoliko se okreće kutnom brzinom ω. Odredi amplitudu titranja elektromotorne sile inducirane u zatvorenoj petlji koja leži u ravnini okomitoj na vektor $\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+3\hat{\mathbf{z}}$ te omeđuje površinu S.

Postupak: Prema Faradayevu zakonu, inducirana elektromotorna sila jednaka je negativnoj vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz petlju,

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Zadano magnetsko polje možemo napisati kao

$$\mathbf{B}[t] = B_0(\hat{\mathbf{x}}\,\cos[\omega t+\phi] \pm \hat{\mathbf{y}}\,\sin[\omega t+\phi]),$$

gdje pozitivni (negativni) predznak odgovara pozitivnom (negativnom) smjeru vrtnje vektora $\mathbf{B}$, a ϕ je fazni pomak. U nastavku ćemo odabrati pozitivan predznak (pozitivan smjer vrtnje) i fazni pomak $\phi = 0$. Vektorski element površine $\mathrm{d}\mathbf{S}$ je produkt iznosa površine $\mathrm{d}S$ i jediničnog vektora okomitog na nju. Ovdje možemo napisati

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\hat{\mathbf{x}}+2\hat{\mathbf{y}}+3\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{14}}\,\mathrm{d}S.$$

Za tok magnetskog polja dobivamo

$$\Phi_B[t] = \int_S \mathbf{B}[t]\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{B_0}{\sqrt{14}}\int_S(\cos[\omega t]+2\sin[\omega t])\,\mathrm{d}S = \frac{B_0 S}{\sqrt{14}}(\cos[\omega t]+2\sin[\omega t]),$$

te inducirana elektromotorna sila slijedi kao

$$\mathcal{E}[t] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B[t] = \frac{B_0 S\omega}{\sqrt{14}}(\sin[\omega t]-2\cos[\omega t]).$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja, faktor u okruglim zagradama raspisujemo koristeći Eulerovu formulu za kompleksne brojeve,

$$\begin{aligned}\sin[\omega t]-2\cos[\omega t] &= \cos[\omega t-\pi/2]-2\cos[\omega t]\\ &= \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\pi/2)}-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \mathrm{Re}[-(\mathrm{i}+2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \mathrm{Re}[\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \sqrt{5}\,\cos[\omega t+\psi].\end{aligned}$$

(Fazni pomak ψ u gornjem se izrazu pojavio kada smo kompleksni broj $-\mathrm{i}-2$ napisali u obliku $\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Samu vrijednost faznog pomaka ψ ovdje nije potrebno posebno odrediti.) Slijedi da induciranu elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E}[t] = \mathcal{E}_0\cos[\omega t+\psi],$$

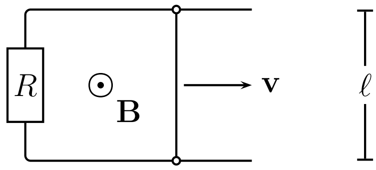
gdje je

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$$

amplituda njenog titranja.

Rješenje: $\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$

Zadatak 2.4.4: Dvije paralelne vodljive tračnice leže u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Tračnice su povezane električnim otporom R, razmak među njima je ℓ, te po njima klizi vodljivi štap (vidi sliku). Odredi jakost sile koja mora djelovati na štap kako bi se on gibao stalnom brzinom iznosa v.



Postupak: Najprije ćemo odrediti induciranu elektromotornu silu, zatim struju koja teče petljom, te konačno silu koja djeluje na štap i koju treba uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi se štap gibao stalnom brzinom. Prema Faradayevu zakonu indukcije, elektromotorna sila inducirana u petlji koju čine tračnice, otpor i štap jednaka je (negativnoj) promjeni toka magnetskog polja kroz petlju. Ovdje možemo pisati

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}SB = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

gdje je S površina petlje koja se u vremenu mijenja, a B je stalno magnetsko polje koje smo izlučili ispred operatora $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Pretpostavimo li da se štap giba brzinom iznosa v, on u vremenskom intervalu Δt napravi pomak $\Delta x = v\,\Delta t$, a time poveća površinu petlje za

$$\Delta S = \ell\,\Delta x = \ell v\,\Delta t.$$

Slijedi da možemo pisati

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \ell v,$$

odnosno

$$\mathcal{E} = -B\ell v.$$

Uslijed inducirane elektromotorne sile $\mathcal{E}$ petljom teče električna struja I čija je jakost određena električnim otporom R. Prema Ohmovu zakonu,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Silu koja djeluje na štap određujemo s pomoću izraza za element sile $\mathrm{d}\mathbf{F}$ koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u polju $\mathbf{B}$,

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}.$$

Ovdje je ravni štap duljine ℓ okomit na homogeno polje te je jakost sile

$$F = I\ell B = \frac{\mathcal{E}\ell B}{R} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}.$$

Tu je silu potrebno uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi štap bio u ravnoteži i gibao se stalnom brzinom iznosa v.

Rješenje: $F = B^2\ell^2 v/R$

Zadatak 2.4.5: Koaksijalni kabel se sastoji od vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i od vodljivog omotača polumjera $b = 2.5\,\mathrm{mm}$. Jezgra je nabijena linijskom gustoćom naboja $\lambda = 10^{-6}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$, a omotač je nabijen linijskom gustoćom naboja jednakog iznosa ali suprotnog predznaka. Odredi energiju električnog polja po jedinici duljine kabla. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.)

Postupak: Volumna gustoća energije elektromagnetskog polja općenito je dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right),$$

gdje je E jakost električnog, a B je jakost magnetskog polja. Magnetsko polje ovdje nije prisutno, a električno polje u prostoru između jezgre i omotača možemo smatrati ekvivalentnim električnom polju beskonačnog pravca nabijenog linijskom gustoćom naboja λ. Jakost tog polja je

$$E[r] = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}, \qquad a \le r \le b$$

(gornji izraz slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Unutar same jezgre, kao i izvan omotača kabla, električno polje iščezava. Slijedi da je volumna gustoća energije elektromagnetskog polja unutar ovog kabla

$$w[r] = \frac{\epsilon_0}{2} E^2[r] = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ dobiva se integracijom po prostoru između jezgre kabla i omotača kabla. Element volumena $\mathrm{d}V$ možemo napisati kao umnožak površine omotača cilindra polumjera r i duljine ℓ, $A = 2r\pi\ell$, i radijalnog pomaka $\mathrm{d}r$,

$$\mathrm{d}V = 2r\pi\ell\,\mathrm{d}r.$$

Slijedi

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r] 2r\pi\ell\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Energija polja po jedinici duljine kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i λ dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 8.23 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell = (\lambda^2/4\pi\epsilon_0)\ln[b/a] \simeq 8.235 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

Zadatak 2.4.6: Koaksijalni kabel se sastoji od šuplje vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i vodljivog omotača polumjera $b = 5\,\mathrm{mm}$. Kroz vodiče u suprotnim smjerovima teku struje jednake jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Odredi energiju magnetskog polja po jedinici duljine kabla. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Gustoća energije elektromagnetskog polja je općenito dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right).$$

U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, dok magnetsko polje iščezava unutar tanjeg vodiča jer kroz kružnu petlju polumjera $r < a$ ne teče struja, kao i izvan omotača jer se struje koje teku kroz kružnu petlju polumjera $r > b$ poništavaju. Jakosti magnetskog polja u prostoru između jezgre i omotača doprinosi struja koja teče jezgrom kabla. Prema Ampèreovu zakonu,

$$B[r] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \qquad a \le r \le b.$$

Gustoća energije elektromagnetskog polja sada je

$$w[r] = \frac{1}{2\mu_0}B^2[r] = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, \qquad a < r < b.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ je

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r]\,2\pi r\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Linijska gustoća energije kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i I dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\lambda = (\mu_0 I^2/4\pi)\ln[b/a] \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

2.5 Elektromagnetski valovi

Zadatak 2.5.1: Ravni linearno polarizirani elektromagnetski val valne duljine λ širi se u vakuumu u smjeru jediničnog vektora $\hat{\mathbf{x}}$. Amplituda titranja električnog polja tog vala je E_0, a smjer se podudara s vektorom $\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$. Sastavi izraze koji opisuju pripadajuće magnetsko polje $\mathbf{B}$ te Poyntingov vektor $\mathbf{S}$.

Postupak: Općenit izraz za električno polje ravnog linearno polariziranog vala možemo napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}, t] = \mathbf{E}_0 \cos[\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi],$$

gdje je $\mathbf{E}_0$ amplituda električnog polja (vektor), $\boldsymbol{\kappa}$ je valni vektor (vrijedi $\mathbf{E}_0 \cdot \boldsymbol{\kappa} = 0$), $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$ je položaj točke u prostoru, ω je frekvencija, t je vrijeme, a ϕ je fazni pomak. Za val valne duljine λ koji se u vakuumu širi u smjeru $\hat{\mathbf{x}}$ imamo $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\,\hat{\mathbf{x}}$, $\kappa = 2\pi/\lambda$, $\omega = \kappa c$, te s obzirom na zadanu linearnu polarizaciju, $\mathbf{E}_0 = E_0\,(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$. Slijedi

$$\mathbf{E}[x, t] = E_0\,\frac{\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi\right].$$

Magnetsko polje dobivamo koristeći izraz $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\kappa}} \times (\mathbf{E}/c)$, gdje je u ovom slučaju $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \hat{\mathbf{x}}$. Slijedi

$$\mathbf{B}[x, t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi\right].$$

Poyntingov vektor, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, slijedi kao

$$\mathbf{S}[x, t] = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\hat{\mathbf{x}}\,\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi\right] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\hat{\mathbf{x}}\,\left(1 + \cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(x - ct) + 2\phi\right]\right).$$

Rješenje: $\mathbf{B}[x, t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}}\,\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi]$, $\mathbf{S}[x, t] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\hat{\mathbf{x}}\,(1 + \cos[\frac{4\pi}{\lambda}(x - ct) + 2\phi])$

Zadatak 2.5.2: Ukupna snaga Sunčeva zračenja je $L_\odot = 3.839 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$ (tzv. luminozitet Sunca), a srednja udaljenost Zemlje od Sunca je $a = 149.6 \times 10^9\,\mathrm{m}$ (tzv. astronomska jedinica). Odredi srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na Zemlji. Zatim, pretpostavljajući da je Sunčevo zračenje ravni linearno polarizirani val, odredi amplitude kojima titraju električno i magnetsko polje.

Postupak: Srednja vrijednost iznosa Poyntingova vektora odgovara količini energije elektromagnetskog zračenja koja prolazi jediničnom plohom u jedinici vremena. Shvatimo li Sunce kao točkasti izvor snage $L_\odot$, srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na udaljenosti a od Sunca možemo napisati kao

$$\langle S \rangle = \frac{L_\odot}{4a^2\pi} \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Sam Poyntingov vektor definiran je izrazom

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

gdje su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ električno i magnetsko polje. u ravnom valu $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ titraju u fazi, međusobno su okomiti, a za njihove amplitude E_0 i B_0 vrijedi

$$E_0 = cB_0.$$

Slijedi da iznos Poyntingova vektora u danoj točki prostora možemo napisati kao

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \cos^2[\omega t],$$

te s obzirom da je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije jednaka $1/2$, srednju vrijednost pišemo kao

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0.$$

Koristeći $E_0 = cB_0$ slijedi

$$E_0^2 = 2\mu_0 c \langle S \rangle = \frac{\mu_0 c L_\odot}{2a^2\pi},$$

odnosno,

$$B_0^2 = \frac{2\mu_0}{c}\langle S \rangle = \frac{\mu_0 L}{2ca^2\pi}.$$

Uz poznate konstante dobivamo vrijednosti $E_0 \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 \simeq 3.383 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$.

Rješenje: $\langle S \rangle = L_\odot/4a^2\pi \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $E_0 = \sqrt{\mu_0 c L_\odot/2a^2\pi} \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$,
$B_0 = \sqrt{\mu_0 L_\odot/2ca^2\pi} \simeq 3.383 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$

Zadatak 2.5.3: Ravni (eliptički polarizirani) elektromagnetski val čije je električno polje opisano izrazom

$$\mathbf{E}[z,t] = E_{0x}\,\hat{\mathbf{x}}\,\cos[\kappa z - \omega t] + E_{0y}\,\hat{\mathbf{y}}\,\sin[\kappa z - \omega t]$$

pada na polarizator koji propušta komponentu vala čije je električno polje usporedno s vektorom $3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$. Odredi amplitudu titranja električnog polja nakon prolaska vala kroz polarizator.

Postupak: Komponenta upadnog elektromagnetskog vala čije je električno polje okomito na propusni smjer polarizatora se pri prolasku kroz polarizator apsorbira, dok komponenta vala čije je električno polje usporedno s propusnim smjerom polarizatora ostaje nepromijenjena. Komponentu upadnog električnog polja koja je usporedna s propusnim smjerom polarizatora računamo kao projekciju upadnog polja na taj smjer . Uvodimo jedinični vektor propusnog smjera polarizatora,

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{3\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{10}},$$

te kao projekciju zadanog električnog polja na taj smjer imamo

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}},$$

gdje je

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}\cos[\kappa z - \omega t] + \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}}\sin[\kappa z - \omega t].$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja uvodimo oznake

$$a = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}, \qquad b = \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}},$$

te gornji izraz za projekciju polja zapisujemo kao

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = a\cos[\kappa z - \omega t] + b\cos[\kappa z - \omega t - \pi/2].$$

Korištenjem Eulerove formule slijedi

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \mathrm{Re}\left[a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t)}\right] + \mathrm{Re}\left[b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t-\pi/2)}\right] = \mathrm{Re}\left[(a-\mathrm{i}\,b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t)}\right] = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos[\kappa z - \omega t + \phi]$$

(faza ϕ pojavila se kada smo kompleksni broj $a - \mathrm{i}\,b$ napisali kao $\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$). Konačno, električno polje nakon prolaska kroz polarizator je

$$\mathbf{E}' = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos[\kappa z - \omega t + \phi]\,\hat{\mathbf{p}},$$

gdje kao amplitudu titranja prepoznajemo

$$E_0' = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{9}{10}E_{0x}^2 + \frac{1}{10}E_{0y}^2}.$$

Rješenje: $E_0' = \sqrt{(9E_{0x}^2 + E_{0y}^2)/10}$

2.6 Valna optika

Zadatak 2.6.1: Bijela svjetlost pada okomito na tanku opnu od sapunice indeksa loma $n = 4/3$. Odredi najmanju debljinu opne pri kojoj istovremeno dolazi do najslabije moguće refleksije plave svjetlosti (valna duljina u vakuumu $\lambda_{\mathrm{B}} = 480\,\mathrm{nm}$) i do najjače moguće refleksije crvene svjetlosti ($\lambda_{\mathrm{R}} = 640\,\mathrm{nm}$).

Postupak: Razlika u fazi svjetlosti valne duljine λ reflektirane na prednjoj i one reflektirane na stražnjoj strani opne debljine d i indeksa loma n je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda} + \pi,$$

gdje je $\Delta s = s_2 - s_1 = 2nd$ razlika u duljini optičkih putova koje prevaljuju dvije zrake, dok je član π je prisutan zbog toga što se jedna od dvije zrake reflektira od optički gušćeg sredstva. Uvjet destruktivne interferencije za plavu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_{\mathrm{B}} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_{\mathrm{B}}} + \pi = (2k+1)\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

iz čega slijedi

$$d = \frac{\lambda_{\mathrm{B}}}{2n}k = 180\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 540\,\mathrm{nm}, 720\,\mathrm{nm}, \ldots$$

Uvjet konstruktivne interferencije za crvenu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_{\mathrm{R}} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_{\mathrm{R}}} + \pi = 2k'\pi, \qquad k' = 1, 2, \ldots$$

što daje

$$d = \frac{\lambda_{\mathrm{R}}}{4n}\left(2k' - 1\right) = 120\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 600\,\mathrm{nm}, \ldots$$

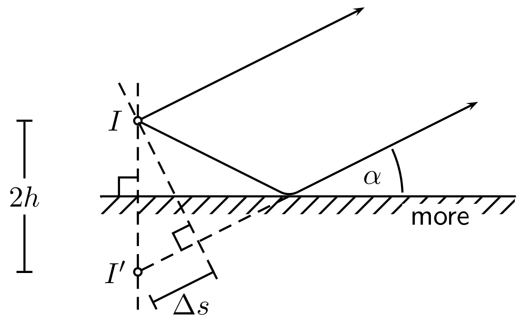
Usporedbom dobivenih vrijednosti pronalazimo da je najmanja debljina opne koja zadovoljava oba uvjeta

$$d_{\min} = 360\,\mathrm{nm}.$$

Rješenje: $d_{\min} = 360\,\mathrm{nm}$

Zadatak 2.6.2: Odašiljač radio-valova valne duljine $\lambda = 10\,\mathrm{m}$ nalazi se na visini $h = 8\,\mathrm{m}$ iznad mirne površine mora. Uzimajući u obzir da površina mora reflektira radio-valove, odredi kuteve u odnosu nju pod kojima se, s velike udaljenosti, opaža maksimume i minimume jakosti radio-signala.

Postupak: Razlika u fazi vala koji do prijamnika na udaljenosti $r \gg h$ stiže izravno od odašiljača i vala koja do njega stiže nakon refleksije na površini mora prisutna je zbog razlike u duljini optičkih putova dvaju valova te zbog pomaka u fazi π (polovica punog ciklusa titranja) koja nastupa pri refleksiji vala na granici s optički gušćim sredstvom.



Kao što prikazuje gornja skica, val koji se reflektira na površini mora možemo shvatiti kao da potječe od zrcalne slike izvora koja se nalazi na dubini h ispod površine mora. Tada je lako vidjeti da je razlika duljine optičkih putova dvaju valova

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2h \sin\alpha,$$

gdje je α kut elevacije prijamnika. Tome odgovara razlika u fazi

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi h \sin\alpha}{\lambda} + \pi,$$

gdje je uključen član π zbog refleksije na optički gušćem sredstvu. Uvjet konstruktivne interferencije, odn. maksimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\mathrm{max}} = \frac{\lambda}{4h}(2m-1).$$

S obzirom na to da za zadane vrijednosti h i λ imamo $\lambda/4h = 5/16$ te da nas zanimaju samo pozitivni kutevi, u obzir dolaze samo vrijednosti $m = 1, 2$, za koje dobivamo

$$\sin\alpha_{\mathrm{max}} = \frac{5}{16}, \frac{15}{16},$$

odnosno $\alpha_{\mathrm{max}} \simeq 18.21^\circ, 69.64^\circ$. Uvjet destruktivne interferencije, odn. minimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\mathrm{min}} = \frac{\lambda}{2h} m.$$

U obzir dolaze vrijednosti $m = 0, 1$, za koje imamo

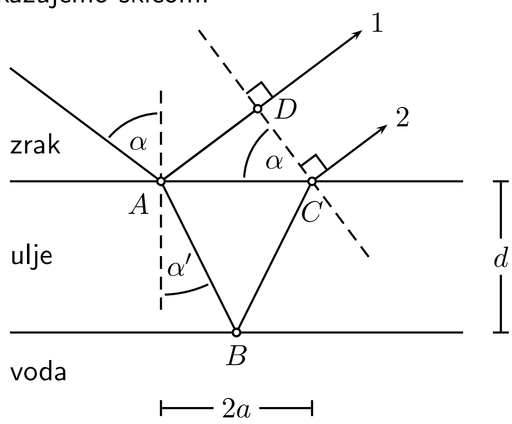
$$\sin\alpha_{\mathrm{min}} = 0, \frac{5}{8},$$

odnosno $\alpha_{\mathrm{min}} \simeq 0^\circ, 38.68^\circ$.

Rješenje: Maksimumi: $\sin\alpha_{\mathrm{max}} = (\lambda/4h)(2m-1)$, $m = 1, 2$, $\alpha_{\mathrm{max}} \simeq 18.21^\circ, 69.64^\circ$, minimumi: $\sin\alpha_{\mathrm{min}} = (\lambda/2h)m$, $m = 0, 1$, $\alpha_{\mathrm{min}} \simeq 0^\circ, 38.68^\circ$.

Zadatak 2.6.3: Na vodi pluta sloj ulja debljine d i indeksa loma n koji je veći od indeksa loma vode. Odredi razliku u fazi između svjetlosti valne duljine λ reflektirane na graničnoj plohi zrak–ulje i one reflektirane na graničnoj plohi ulje–voda, ako svjetlost upada iz zraka pod kutom α. (Indeks loma zraka jednak je jedinici.)

Postupak: Opisanu situaciju prikazujemo skicom:



Upadna svjetlost reflektira se od granične plohe zrak–ulje (na skici zraka 1) i od granične plohe ulje–voda (zraka 2). Razlika u fazi posljedica je razlike u duljini optičkih putova dviju zraka, $\Delta s = s_2 - s_1$, te pomaka u fazi π (polovica ciklusa) koji nastupa pri refleksiji svjetlosti na granici s optički gušćim sredstvom. To je ovdje samo granica zrak–ulje pa se takav pomak pojavljuje samo za zraku 1. Razliku u duljini optičkih putova razmatramo između točke A u kojoj se upadna zraka razdvaja na zrake 1 i 2, te točaka C i D u kojima zrake 1 i 2 presijecaju ravninu okomitu na njih (desna iscrtkana linija na skici). Možemo pisati

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\frac{s_2 - s_1}{\lambda} + \pi, \qquad s_1 = |AD|, \qquad s_2 = n(|AB| + |BC|).$$

Uvodimo duljinu $2a = |AC|$ (vidi skicu) te iz geometrije prepoznajemo

$$\frac{a}{d} = \tan\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\sqrt{1-\sin^2\alpha'}},$$

Koristeći zakon loma prema kojemu je $n\sin\alpha' = \sin\alpha$ gornji omjer pišemo u obliku

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Optički put zrake 1 sada možemo napisati kao

$$s_1 = |AD| = |AC|\sin\alpha = 2a\sin\alpha = \frac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}},$$

dok je optički put zrake 2

$$s_2 = n(|AB| + |BC|) = 2n|AB| = 2n\sqrt{d^2+a^2} = 2nd\sqrt{1+\left(\frac{a}{d}\right)^2} = \frac{2n^2 d}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Konačno, razlika optičkih puteva je

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha},$$

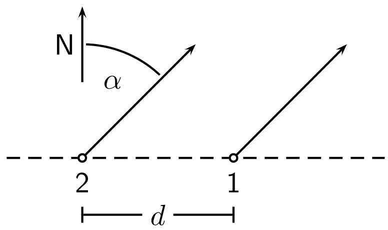
a razlika u fazi uključujući i pomak π zbog refleksije zrake 1 na optički gušćem sredstvu je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \pi.$$

Rješenje: $\Delta\phi = (4\pi d/\lambda)\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \pi$

Zadatak 2.6.4: Dva odašiljača radio valova valne duljine $\lambda = 100\,\mathrm{m}$ leže na pravcu istok–zapad na razmaku $d = 200\,\mathrm{m}$. Odredi fazni pomak među odašiljačima s pomoću kojega se maksimum intenziteta odašilje u smjeru sjeveroistoka.

Postupak: Odašiljače prikazujemo skicom:



Električno polje istočnog odašiljača koje prijamnik opaža u nekoj točki možemo napisati kao

$$E_1[t] = E_{10}\cos\left[\omega t + \phi_1 - 2\pi\frac{s_1}{\lambda}\right] = E_0\cos[\omega t - \psi_1],$$

gdje je E_{10} amplituda titranja polja (razmjerna snazi odašiljača te ovisna o udaljenosti odašiljača od prijamnika), ϕ_1 je faza odašiljača, s_1 je duljina optičkog puta (udaljenost) između odašiljača i prijamnika, a

$$\psi_1 = \phi_1 - 2\pi s_1/\lambda$$

je faza s kojom prijamnik prima val. Na istovjetan način možemo napisati i polje zapadnog odašiljača,

$$E_2[t] = E_{20}\cos[\omega t - \psi_2], \qquad \psi_2 = \phi_2 - 2\pi s_2/\lambda.$$

Razliku u fazi tih valova možemo napisati kao

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = \Delta\phi - 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda},$$

gdje je $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ fazni pomak među odašiljačima, a $\Delta s = s_2 - s_1$ je razlika duljine optičkih puteva za dani položaj prijamnika. Ako se prijamnik nalazi na velikoj udaljenosti pod azimutom α, iz geometrije slijedi (vidi skicu)

$$\Delta s = s_2 - s_1 = d\sin\alpha.$$

Nadalje, ako se on nalazi u smjeru sjeveroistoka imamo $\alpha = \pi/4$, što daje

$$\Delta s = d\sin\frac{\pi}{4} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Razlika u fazi sada je

$$\Delta\psi = \Delta\phi - \frac{d\pi\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Kako bismo postigli konstruktivnu interferenciju zahtijevamo

$$\Delta\psi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

S obzirom da za zadane vrijednosti λ i d imamo $d/\lambda = 2$, gornji uvjet glasi $\Delta\phi = 2\pi(m + \sqrt{2})$, Uočavamo da se vrijednost faznog pomaka $\Delta\phi$ koja se nalazi unutar intervala $[-\pi, \pi]$ dobiva se uz $m = -1$ i ona je

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Ta je vrijednost pozitivna te zaključujemo da zapadni odašiljač mora prethoditi $\sqrt{2} - 1 \simeq 0.41$ punog ciklusa u odnosu na istočni odašiljač.

Rješenje: Zapadni odašiljač prethodi s $\Delta\phi = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$

Zadatak 2.6.5: Tri koherentna izvora zračenja valne duljine λ leže na pravcu. Odredi namanji razmak d među susjednim izvorima kojime se postiže iščezavanje zračenja u točkama koje leže na istom pravcu kao i izvori na velikoj udaljenosti od izvora. (Podrazumijeva se da su izvori jednake jakosti te da titraju u fazi.)

Postupak: Neka izvori leže na x-osi pri koordinatama $x = 0, \pm d$. Na udaljenosti od izvora znatno većoj od d možemo smatrati da sva tri izvora doprinose poljima koja titraju jednakim amplitudama te ukupno električno polje u točkama na samoj x-osi možemo napisati kao

$$E[x,t] = E_0 \cos[\omega t - k(x+d)] + E_0 \cos[\omega t - kx] + E_0 \cos[\omega t - k(x-d)],$$

gdje je

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Koristeći kompleksni zapis imamo

$$\begin{aligned} E[x,t] &= E_0 \operatorname{Re}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x+d))} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x-d))}\big] \\ &= E_0 \operatorname{Re}\big[\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \operatorname{Re}\big[\big(1 + 2\cos[kd]\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \,\big(1 + 2\cos[kd]\big) \cos[\omega t - kx], \end{aligned}$$

gdje prepoznajemo titranje amplitudom $E_0(1 + 2\cos[kd])$ koja iščezava ako vrijedi

$$\cos[kd] = -\frac{1}{2}.$$

Najmanja vrijednost d koja zadovoljava gornji uvjet je

$$d_{\min} = \frac{1}{k} \arccos\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{\lambda}{3}.$$

Isti rezultat se može dobiti i korištenjem poznatog izraza za intenzitet zračenja rešetke s N koherentnih izvora na međusobnom razmaku d,

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N \frac{\pi d}{\lambda} \sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda} \sin\alpha\right]}.$$

Ovdje je $N = 3$, a za točke na pravcu na kojem leže izvori stavljamo $\alpha = \pi/2$. Zahtijev da zračenje u tim točkama iščezne vodi na

$$\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda}\right] \neq 0, \qquad \sin\left[3\frac{\pi d}{\lambda}\right] = 0,$$

odnosno

$$3\frac{\pi d}{\lambda} = \pi, 2\pi, \ldots$$

Najmanji d koji zadovoljava gornji uvjet je $d_{\min} = \lambda/3$.

Rješenje: $d_{\min} = \lambda/3$

Zadatak 2.6.6: Kontinuirani spektar zračenja s valnim duljinama u području od $\lambda_{\mathrm{B}} = 420\,\mathrm{nm}$ do $\lambda_{\mathrm{R}} = 680\,\mathrm{nm}$ (bijela svjetlost) pada okomito na optičku rešetku s razmakom $d = 5\,\mu\mathrm{m}$ među pukotinama. Odredi kutnu širinu razmaka (tamnog područja) između kraja prvog i početka drugog spektra u kutnoj raspodjeli zračenja rešetke. Zatim odredi valnu duljinu drugog spektra pri kojoj nastupa preklop s početkom trećeg spektra.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta svjetlosti valne duljine λ pri difrakciji na rešetki s razmakom među pukotinama d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

a njeni se glavni maksimumi, $I_{\max} = N^2 I_0$, nalaze pri

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

gdje $m = 0$ odgovara središnjem ili nultom maksimumu, $m = \pm 1$ odgovara prvom maksimumu itd. S obzirom da ovdje imamo kontinuirani spektar, prvi se maksimum ($m = 1$), odn. spektar prvog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{1B} = \frac{\lambda_{\mathrm{B}}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{1R} = \frac{\lambda_{\mathrm{R}}}{d},$$

Drugi maksimum ($m = 2$), odn. spektar u drugog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{2B} = \frac{2\lambda_{\mathrm{B}}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{2R} = \frac{2\lambda_{\mathrm{R}}}{d}.$$

S obzirom da za zadane granične valne duljine λ_{B} i λ_{R} vrijedi $2\lambda_{\mathrm{B}} > \lambda_{\mathrm{R}}$, slijedi $\alpha_{2B} > \alpha_{1R}$ te zaključujemo da zaista postoji razmak (tamno područje) između kraja spektra prvog i početka spektra drugog reda. Kutna širina tog razmaka je

$$\Delta\alpha = \alpha_{2B} - \alpha_{1R} = \arcsin\left[\frac{2\lambda_{\mathrm{B}}}{d}\right] - \arcsin\left[\frac{\lambda_{\mathrm{R}}}{d}\right],$$

što za zadane vrijednosti $\lambda_{\mathrm{B,R}}$ i d daje $\Delta\alpha \simeq 1.85°$. Treći maksimum ($m = 3$), odn. spektar trećeg reda, u kutnoj raspodjeli počinje pri

$$\sin\alpha_{3B} = \frac{3\lambda_{\mathrm{B}}}{d}.$$

S obzirom da za zadane valne duljine $\lambda_{\mathrm{B,R}}$ vrijedi $3\lambda_{\mathrm{B}} < 2\lambda_{\mathrm{R}}$, slijedi $\alpha_{3B} < \alpha_{2R}$, što potvrđuje da se početak trećeg spektra nalazi unutar spektra drugog reda. Valna duljina λ spektra drugog reda kojoj odgovara isti kut otklona kao i početku spektra trećeg reda slijedi iz uvjeta

$$\sin\alpha = \frac{2\lambda}{d} = \frac{3\lambda_{\mathrm{B}}}{d},$$

što daje

$$\lambda = \frac{3}{2}\lambda_{\mathrm{B}}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda = 630\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\Delta\alpha = \arcsin[2\lambda_{\mathrm{B}}/d] - \arcsin[\lambda_{\mathrm{R}}/d] \simeq 1.85°$, $\lambda = 3\lambda_{\mathrm{B}}/2 = 630\,\mathrm{nm}$

Zadatak 2.6.7: Monokromatska svjetlost upada okomito na optičku rešetku koja se sastoji od niza pukotina širine a raspoređenih tako da je razmak među središtima susjednih pukotina d. Na zastoru promatramo svijetle i tamne pruge. Na mjestu gdje bismo očekivali treći po redu interferencijski maksimum pojavljuje se prvi po redu difrakcijski minimum. Odredi omjer širine pukotina a i razmaka među njihovim središtima d.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri interferenciji N točkastih koherentnih izvora valne duljine λ na međusobnom razmaku d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

gdje glavne interferencijske maksimume iznosa $I_{\max} = N^2 I_0$ očekujemo pri kutu α za koji vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Kut koji odgovara trećem po redu glavnom interferencijskom maksimumu dan je s

$$\sin\alpha_3 = \frac{3\lambda}{d}.$$

Svaki od koherentnih izvora ovdje je pukotina širine a te osim same interferencije izvora uzimamo u obzir i difrakciju. Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri difrakciji svjetlosti valne duljine λ na pukotini širine a opisan je izrazom

$$I[\alpha'] = I_0 \frac{\sin^2\left[\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right]}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right)^2}.$$

Minimume očekujemo pri kutu α' koji zadovoljava

$$\sin\alpha' = \frac{\lambda}{a}m' \qquad m' = \pm1, \pm2, \ldots$$

Za prvi difrakcijski minimum uzimamo $m = 1$, odnosno

$$\sin\alpha'_1 = \frac{\lambda}{a}.$$

Uvjet zadatka glasi

$$\alpha_3 = \alpha'_1,$$

odnosno, napišemo li $\sin\alpha_3 = \sin\alpha'_1$, slijedi

$$\frac{3\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a},$$

na osnovu čega je traženi omjer

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}.$$

Rješenje: $a/d = 1/3$

Zadatak 2.6.8: Snop prirodne svjetlosti intenziteta I_0 upada na niz od tri polarizatora. Propusni smjer trećeg i propusni smjer prvog polarizatora zatvaraju kut θ_{31} dok se kut θ_{21} što ga zatvara propusni smjer drugog polarizatora s propusnim smjerom prvog polarizatora može podešavati. Odredi kut θ_{21} kojime se postiže najveći intenzitet snopa nakon njegova prolaska trećim polarizatorom te iznos najvećeg intenziteta.

Postupak: Intenzitet snopa nakon prolaska prvim polarizatorom jednak je jednoj polovini uparnog intenziteta,

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0,$$

jer polarizator apsorbira jedan od dvaju ravnomjerno zastupljenih smjerova polarizacije prirodne svjetlosti. Daljnji pad intenziteta nakon prolaska snopa drugim i trećim polarizatorom slijedi primjenom Malusova zakona,

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_{21}, \qquad I_3 = I_2 \cos^2 \theta_{32},$$

gdje je θ_{21} traženi kut između drugog i prvog polarizatora, a θ_{32} je kut između trećeg i drugog polarizatora. Koristeći

$$\theta_{21} + \theta_{32} = \theta_{31}$$

možemo napisati

$$I_3 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 \theta_{32} = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 [\theta_{31} - \theta_{21}].$$

Kut θ_{21} s kojim se ostvaruje maksimum intenziteta I_3 pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}\theta_{21}} = -2(\tan \theta_{21} - \tan[\theta_{31} - \theta_{21}]) I_3$$

koji je ispunjen kada je

$$\tan \theta_{21} = \tan[\theta_{31} - \theta_{21}],$$

odnosno za

$$\theta_{21} = \theta_{31}/2.$$

Maksimalni intenzitet je

$$(I_3)_{\max} = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 [\theta_{31}/2].$$

Rješenje: $\theta_{21} = \theta_{31}/2$, $I_{\max} = I_0 \cos^4 [\theta_{31}/2]/2$