Lagrangeova formulacija mehanike i elektromehanike

Elektromehanika

3. studenog 2016.

Table of Contents

1 Uvod (podsjetnik)
- Očuvanje mehaničke energije i jednadžba gibanja
- Sustavi s nekonzervativnim silama

2 Lagrangeov formalizam u mehanici
- Lagrangeove jednadžbe gibanja za konzervativne sustave
- Nekonzervativni sustavi (funkcija snage)

3 Primjena na elektromehaničke sustave
- Električni sustavi (bez pokretnih dijelova)
- Jednostavni elektromehanički pretvornici

Očuvanje mehaničke energije i jednadžba gibanja

Kinetička energija K

Kinetička energija K krutog tijela može se izraziti kao

$$K = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2} I^* \omega^2,$$

gdje je m masa tijela, v_{cm} je iznos brzine središta mase tijela, I^* je moment tromosti tijela u odnosu na os koja prolazi njegovim središtem mase, a ω je iznos kutne brzine vrtnje tijela oko te osi.

Primjer. Kotrljanje homogene kugle ($I^* = \frac{2}{5} m r^2$) bez klizanja ($\omega = v_{\mathrm{cm}}/r$) po ravnoj podlozi:

$$K = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{5} m r^2 \left(\frac{v_{\mathrm{cm}}}{r}\right)^2 = \frac{7}{10} m v_{\mathrm{cm}}^2$$

Potencijalna energija U (neformalna definicija)

Potencijalna energija $U[\mathbf{x}]$ mehaničkog sustava u položaju $\mathbf{x}$ jest rad koji je potrebno obaviti kako bismo sustav iz stanja mirovanja u dogovorenom referentnom položaju $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ doveli u stanje mirovanja u položaju $\mathbf{x}$.

Primjer. Potencijalna energija tijela na visini h iznad referentne razine $h = 0$:

$$U = mgh$$

Primjer. Potencijalna energija opruge konstante k koja je sabijena ili rastegnuta za x u odnosu na njeno nenapregnuto stanje $x = 0$:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Mehanička energija E

Mehanička energija E sustava jest zbroj kinetičke energije K i potencijalne energije U,

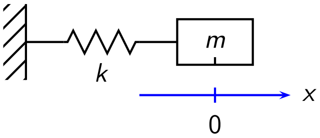
$$E = K + U.$$

Pretpostavimo li da je mehanička energija očuvana, tj. da je sustav *konzervativan*, uvjet

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$$

nas može jednostavnim putem dovesti do jednadžbi gibanja sustava.

Primjer. Titranje mase na opruzi:



Mehanička energija:

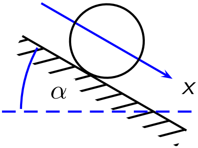
$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Uvjet očuvanja energije:

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Prepoznajemo jednadžbu gibanja jednostavnog harmoničkog oscilatora (kružna frekvencija titranja $\omega = \sqrt{k/m}$).

Primjer. Kotrljanje kugle (bez klizanja) niz kosinu:



Mehanička energija:

$$E = K + U = \frac{7}{10} m\dot{x}^2 - mgx \sin\alpha$$

Uvjet očuvanja energije:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = \cdots = \frac{7}{5} m\dot{x}\left(\ddot{x} - \frac{5}{7} g \sin\alpha\right) \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\alpha$$

Prepoznajemo gibanje stalnom akceleracijom.

Nekoliko upozorenja:

- Potencijalnu energiju U moguće je pridružiti isključivo silama koje djelujući na putu od točke A do točke B obavljaju rad koji ne ovisi o odabiru putanje. Takve sile zovemo *konzervativnim silama*, a sustave u kojima su prisutne isključivo takve sile zovemo *konzervativnim sustavima*, jer je mehanička energija E u njima očuvana veličina.
- Prikazani formalizam za nalaženje jednadžbi gibanja sustava primijenjiv je isključivo u konzervativnim sustavima. Kako bismo uključili tzv. *nekonzervativne sile*, potrebna su proširenja formalizma.
- Prikazani formalizam se značajno komplicira kad promatrani sustav ima više od jednog stupnja slobode.

Sustavi s nekonzervativnim silama

Nekonzervativne sile su npr. sile ovisne o vremenu te sile koje ovise o brzini gibanja čestica ili tijela u sustavu (trenje, otpor).

U sustavima u kojima su prisutne nekonzervativne sile mehanička energija E nije očuvana te ih zovemo *nekonzervativnim sustavima*.

Jednadžba gibanja u nekonzervativnom sustavu

Jednadžbu gibanja u nekonzervativnom sustavu možemo dobiti iz relacije

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P,$$

gdje je E mehanička energija sustava, a P je snaga djelovanja nekonzervativnih sila.

Primjer. Masa na opruzi uz otpor razmjeran brzini i vanjsku periodičnu silu:

Mehanička energija:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Snaga djelovanja sile otpora i vanjske sile:

$$F_x = -b\dot{x} + F_0 \cos \Omega t, \qquad P = F_x\dot{x} = -b\dot{x}^2 + F_0\dot{x}\cos \Omega t$$

Jednadžba gibanja:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = P \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \Omega t$$

Table of Contents

1 Uvod (podsjetnik)
- Očuvanje mehaničke energije i jednadžba gibanja
- Sustavi s nekonzervativnim silama

2 Lagrangeov formalizam u mehanici
- Lagrangeove jednadžbe gibanja za konzervativne sustave
- Nekonzervativni sustavi (funkcija snage)

3 Primjena na elektromehaničke sustave
- Električni sustavi (bez pokretnih dijelova)
- Jednostavni elektromehanički pretvornici

Lagrangeove jednadžbe gibanja za konzervativne sustave

Kažemo da mehanički sustav ima onoliko stupnjeva slobode koliko međusobno neovisnih parametara određuje njegov položaj.

Poopćene koordinate

Neovisne parametre kojima opisujemo položaj sustava zovemo *poopćenim koordinatama*, a u sustavu s N stupnjeva slobode ih označavamo s $q_1, q_2, \ldots, q_N$.

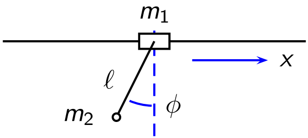
Potencijalnu energiju sustava možemo izraziti kao

$$U = U[q_1, q_2, \ldots, q_N].$$

U izrazu za kinetičku energiju sustava se osim poopćenih koordinata pojavljuju i njihove vremenske derivacije,

$$K = K[q_1, q_2, \ldots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N].$$

Primjer. Tijelo m_1 klizi bez trenja duž vodoravne tračnice, a s njega na niti duljine ℓ visi sitno tijelo m_2:



Sustav ima dva stupnja slobode. Poopćene koordinate:

$$q_1 = x, \qquad q_2 = \phi$$

Potencijalna energija:

$$U = -m_2 g \ell \cos\phi$$

Kinetička energija:

$$K = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\left(\dot{x} + \ell \dot{\phi} \cos\phi \right)^2 + \left(\ell \dot{\phi} \sin\phi \right)^2 \right)$$

Lagrangian L

Lagrangian L sustava čija je kinetička energija K i čija je potencijalna energija U jest funkcija

$$L = K - U.$$

Lagrangeove jednadžbe gibanja za konzervativne sustave

Ako je L lagrangian konzervativnog sustava te ako su q_i, $i = 1, \ldots, N$, poopćene koordinate, gibanje sustava je opisano tzv. *Lagrangeovim jednadžbama* koje glase

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Primjer. Lagrangeove jednadžbe gibanja sustava iz prethodnog primjera:

Jednadžba gibanja za poopćenu koordinatu $q_1 = x$:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2\ell(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi) = 0$$

Jednadžba gibanja za poopćenu koordinatu $q_2 = \phi$:

$$\ddot{x}\cos\phi + \ell\ddot{\phi} + g\sin\phi = 0$$

Očuvane veličine

Ako lagrangian L nekog sustava ne ovisi o poopćenoj koordinati q_j (dakle ovisi jedino o njenoj derivaciji $\dot{q}_j$), iz Lagrangeove jednadžbe gibanja za q_j slijedi da je veličina

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

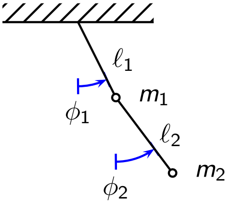
u tom sustavu očuvana (stalna u vremenu).

Primjer. U sustavu iz ranijeg primjera, lagrangian ne ovisi koordinati x te je veličina

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 \ell \dot{\phi} \cos \phi$$

očuvana (radi se o x-komponenti količine gibanja).

Primjer. Dvostruko njihalo:



Potencijalna energija:

$$U = -m_1 g \ell_1 \cos\phi_1 - m_2 g(\ell_1 \cos\phi_1 + \ell_2 \cos\phi_2)$$

Kinetička energija:

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\ell_1 \dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \big(\ell_1 \dot{\phi}_1 \cos\phi_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \cos\phi_2\big)^2 + \frac{1}{2} m_2 \big(\ell_1 \dot{\phi}_1 \sin\phi_1 + \ell_2 \dot{\phi}_2 \sin\phi_2\big)^2$$

Nekonzervativni sustavi (funkcija snage)

U sustavima u kojima djeluju nekonzervativne sile potrebno je Lagrangeove jednadžbe gibanja proširiti dodatnim članovima.

"Funkcija snage" P (neformalna definicija)

Nekonzervativnoj sili $\mathbf{F}$ koja djeluje na neku česticu u sustavu te ovisi o položaju $\mathbf{x}$ i brzini $\mathbf{v}$ čestice te o vremenu t pridružujemo tzv. *funkciju snage* P definiranu integralom

$$P[\mathbf{x}, \mathbf{v}, t] = \int^{\mathbf{v}} \mathbf{F}[\mathbf{x}, \mathbf{v}', t] \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}'.$$

Donja granica integracije je proizvoljna.

Upozorenje: Funkcija snage P definirana ovdje ne podudara se sa snagom djelovanja nekonzervativne sile.

Primjer. Često korištene funkcije snage:

- Sila viskoznog otpora $F_x[\dot{x}] = -b\dot{x}$:

$$P[\dot{x}] = \int_0^{\dot{x}} F_x[\dot{x}'] \, \mathrm{d}\dot{x}' = -b \int_0^{\dot{x}} \dot{x}' \, \mathrm{d}\dot{x}' = -\frac{b}{2}\dot{x}^2$$

- Vanjska harmonička sila $F_x[t] = F_0 \cos \Omega t$:

$$P[\dot{x}] = \int_0^{\dot{x}} F_x[t] \, \mathrm{d}\dot{x}' = F_x[t] \, \dot{x} = F_0 \dot{x} \cos \Omega t$$

Jednadžbe gibanja za nekonzervativne sustave

U nekonzervativnom mehaničkom sustavu u kojem je djelovanje nekonzervativnih sila opisano ukupnom funkcijom snage P, Lagrangeove jednadžbe konzervativnog sustava proširujemo članom na desnoj strani te one glase

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Primjer. Masa na opruzi uz viskozno prigušenje:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \qquad P = -\frac{b}{2}\dot{x}^2$$

Jednadžba gibanja:

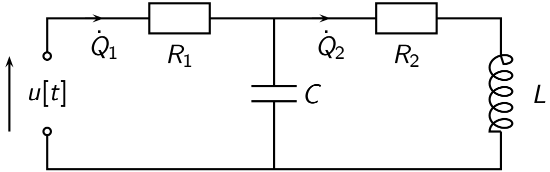
$$m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}$$

Table of Contents

1. Uvod (podsjetnik)
   - Očuvanje mehaničke energije i jednadžba gibanja
   - Sustavi s nekonzervativnim silama
2. Lagrangeov formalizam u mehanici
   - Lagrangeove jednadžbe gibanja za konzervativne sustave
   - Nekonzervativni sustavi (funkcija snage)
3. Primjena na elektromehaničke sustave
   - Električni sustavi (bez pokretnih dijelova)
   - Jednostavni elektromehanički pretvornici

Električni sustavi (bez pokretnih dijelova)

Lagrangeovim formalizmom moguće je konstruirati jednadžbe gibanja u električnim krugovima poput prikazanog:



Poopćene koordinate u električnim krugovima

Kao poopćene koordinate u električnim krugovima koriste se električni naboji Q_i, $i = 1, \ldots, N$, koji su počevši od nekog trenutka (npr. $t = 0$) protekli pojedinim vodičem.

Podrazumijeva se da za struje $\dot{Q}_i$ vrijedi Kirchoffov zakon.

Kinetička energija zavojnica

Energiju magnetskog polja nastalog protjecanjem struje $\dot{Q}$ kroz zavojnicu induktiviteta L shvaćamo kao kinetičku energiju

$$K = \frac{1}{2} L \dot{Q}^2.$$

Kad parom zavojnica induktiviteta L_1 i L_2 teku struje $\dot{Q}_1$ i $\dot{Q}_2$, uzima se u obzir i međuinduktivitet zavojnica L_{12},

$$K = \frac{1}{2} L_1 \dot{Q}_1^2 \pm L_{12} \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + \frac{1}{2} L_2 \dot{Q}_2^2.$$

Potencijalna energija kondenzatora

Energiju električnog polja unutar kondenzatora kapaciteta C u kojem se nalazi naboj Q shvaćamo kao potencijalnu energiju

$$U = \frac{1}{2C} Q^2.$$

Potencijalna energija naponskog izvora

Naponskom izvoru u koji može ovisiti o vremenu te kroz koji je "u pozitivnom smjeru" protekao naboj Q pridružujemo potencijalnu energiju

$$U = -uQ.$$

Funkcija snage otpornika

Otporniku otpora R kojim teče struja $\dot{Q}$ odgovara funkcija snage

$$P = -\frac{1}{2} R \dot{Q}^2.$$

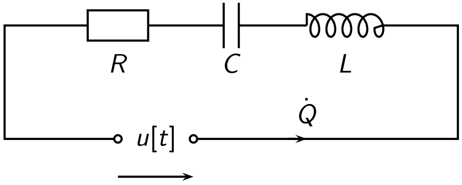
Lagrangian i jednadžbe gibanja električnog sustava

Lagrangian L i jednadžbe gibanja električnog sustava su

$$L = K - U, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = \frac{\partial P}{\partial \dot{Q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, N,$$

gdje je K kinetička energija (zavojnice), U je potencijalna energija (kondenzatori i naponski izvori), a P je funkcija snage (otpornici).

Primjer. Električni oscilator s vanjskom silom:



Kinetička i potencijalna energija, funkcija snage:

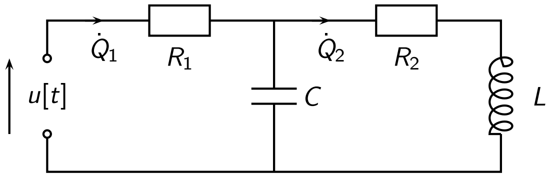
$$K = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 \qquad U = \frac{1}{2C}Q^2 - uQ \qquad P = -\frac{1}{2}R\dot{Q}^2$$

Jednadžba gibanja:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = u[t]$$

Prepoznajemo ekvivalenciju s mehaničkim sustavom.

Primjer. Krug s dva stupnja slobode:



Kinetička i potencijalna energija, funkcija snage:

$$K = \frac{L\dot{Q}_2^2}{2} \qquad U = \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{2C} - uQ_1 \qquad P = -\frac{R_1\dot{Q}_1^2}{2} - \frac{R_2\dot{Q}_2^2}{2}$$

Jednadžbe gibanja:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{C} - u = -R_1\dot{Q}_1 \qquad L\ddot{Q}_2 - \frac{Q_1 - Q_2}{C} = -R_2\dot{Q}_2$$

Jednostavni elektromehanički pretvornici

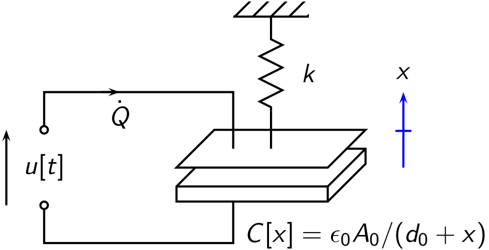
Kapacitivni elektromehanički pretvornik

Sprega između električnog i mehaničkog dijela sklopa može se ostvariti kroz tzv. *kapacitivni elektromehanički pretvornik*. Možemo ga modelirati kao kondenzator s pomičnim pločama. Ako je u referentnom položaju kondenzatora A_0 efektivna površina ploča, a d_0 razmak među njima, kapacitet kondenzatora možemo izraziti kao

$$C = \epsilon_0 \frac{A_0 + \Delta A}{d_0 + \Delta d},$$

gdje je Δd promjena razmaka među pločama, a ΔA je promjena njihove efektivne površine izazvana pomakom.

Primjer. Ploče kondenzatora imaju površinu A_0, donja ploča je nepomična, a gornja ploča ima masu m i visi na opruzi konstante k. Pri naponu $u = 0$, ravnotežni razmak među pločama je d_0.



Sustav ima jedan mehanički stupanj slobode (pomak gornje ploče kondenzatora x) te jedan električni stupanj slobode (naboj Q).

Poopćene koordinate: $q_1 = x$, $q_2 = Q$

Kinetička i potencijalna energija te kapacitet kondenzatora:

$$K = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \qquad U = \frac{k}{2}x^2 + \frac{Q^2}{2C[x]} - uQ \qquad C[x] = \epsilon_0 \frac{A_0}{d_0 + x}$$

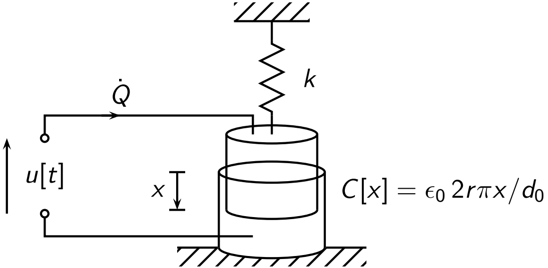
Jednadžbe gibanja:

$$m\ddot{x} + kx + \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A_0} = 0 \qquad \frac{Q(d_0 + x)}{A_0 \epsilon_0} - u = 0$$

Eliminacijom Q:

$$m\ddot{x} = -kx - \epsilon_0 \frac{A_0}{2(d_0 + x)^2} u^2$$

Primjer. Vodljivi valjak mase m i promjera $2r$ koji visi na opruzi konstante k uronjen je do dubine x u nepomični vodljivi plašt. Valjak i plašt su priključeni na naponski izvor $u[t]$, a ravnotežna dubina uranjanja pri $u = 0$ iznosi $x = x_0$. Širina tankog zračnog raspora između valjka i plašta je d_0.



Jednadžba gibanja: $$m\ddot{x} = -k(x - x_0) + \epsilon_0 \frac{r\pi}{d_0} u^2$$

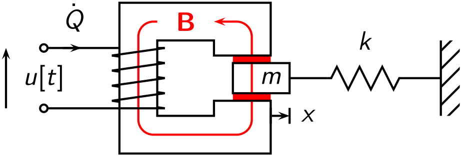
Magnetski elektromehanički pretvornik

Magnetski elektromehanički pretvornik moguće je ostvariti postavljanjem pomičnog elementa načinjenog od magnetskog materijala u blizinu jezgre elektromagneta. Ako je L_0 induktivitet zavojnice elektromagneta pri širini zračnog raspora između jezgre i pomočnog elementa d_0 (u smjeru magnetskog polja) te pri površini poprečnog presjeka raspora A_0 (presjek okomit na magnetsko polje), induktivitet zavojnice nakon pomaka pomičnog elementa možemo opisati empirijskom relacijom

$$L = L_0 \left(1 + \frac{\Delta d}{d_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta A}{A_0}\right)^{-1},$$

gdje su Δd promjena širine, a ΔA je promjena površine zračnog raspora izazvana pomakom.

Primjer. Magnetski pretvornik s promijenjivom površinom zračnih raspora: Pri $\dot{Q} = 0$ ravnotežni položaj pomičnog elementa je $x = x_0 > 0$, a induktivitet je u tom položaju L_0.



Zračni raspor ima oblik pravokutnika sa stranicama b i $a - x$:

$$A[x] = b(a - x) \qquad \frac{\Delta A}{A_0} = \frac{A[x] - A[x_0]}{A[x_0]} = -\frac{x - x_0}{a - x_0}$$

Induktivitet zavojnice elektromagneta:

$$L[x] = L_0 \left(1 + \Delta A / A_0\right)^{-1} = L_0 \frac{a - x_0}{a - x}$$

Kinetička i potencijalna energija:

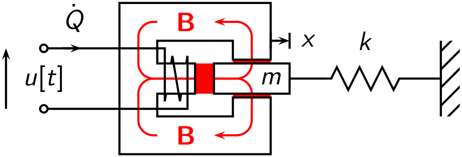
$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L[x]\dot{Q}^2 \qquad U = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 - uQ$$

Jednadžbe gibanja:

$$m\ddot{x} - L_0\frac{a - x_0}{2(a - x)^2}\dot{Q}^2 + k(x - x_0) = 0$$

$$L_0\frac{a - x_0}{a - x}\ddot{Q} + L_0\frac{a - x_0}{(a - x)^2}\dot{Q}\dot{x} - u = 0$$

Primjer. Magnetski pretvornik s promijenjivom širinom zračnog raspora: Pomični element mase m je oprugom konstante k povezan s čvrstim uporištem. Pri $\dot{Q} = 0$, ravnotežna širina zračnog raspora je $x = d_0$, a induktivitet je u tom položaju L_0.



Induktivitet zavojnice elektromagneta:

$$L[x] = L_0\left(1 + \frac{\Delta d}{d_0}\right) = L_0\left(1 + \frac{x - d_0}{d_0}\right) = L_0\frac{x}{d_0}$$

Kinetička i potencijalna energija:

$$K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} L[x]\dot{Q}^2 \qquad U = \frac{1}{2} k(x - d_0)^2 - uQ$$

Jednadžbe gibanja:

$$m\ddot{x} - \frac{L_0}{2d_0}\dot{Q}^2 + k(x - d_0) = 0$$

$$L_0 \frac{x}{d_0}\ddot{Q} + L_0 \frac{1}{d_0}\dot{Q}\dot{x} - u = 0$$