Lagrangeova formulacija mehanike i elektromehanike

Saša Ilijić (FER)

2. travnja 2020.

Sažetak

Surogat predavanja iz Elektromehanike u pisanom obliku.

1 Prvi dio

1.1 Uvod (općenito o modeliranju mehaničkih sustava)

Pri modeliranju mehaničkog sustava najčešće možemo jasno razlučiti ovih nekoliko postupaka:

1. *Određivanje broja stupnjeva slobode sustava:* Za česticu koja se ne može gibati kažemo da nema nijedan stupanj slobode. Čestica čije gibanje je ograničeno na neku krivulju ima jedan stupanj slobode, čestica čije gibanje je ograničeno na neku plohu ima dva stupnja slobode, dok čestica koja se giba u trodimenzionalnom prostoru ima tri stupnja slobode. Kruto tijelo, uzme li se u obzir njegovo najopćenitije gibanje u prostoru, ima šest stupnjeva slobode. Naravno, kruto tijelo čije je gibanje na neki način ograničeno može imati manje od šest stupnjeva slobode. Na primjer, kruto tijelo koje se može samo vrtjeti oko neke čvrste osi ima samo jedan stupanj slobode. Osim sustava s konačnim brojem stupnjeva slobode postoje i oni za koje kažemo da imaju beskonačno mnogo stupnjeva slobode. Sustav s beskonačno mnogo stupnjeva slobode je, na primjer, napeta struna koja dopušta valno gibanje.

2. *Odabir tzv. poopćenih koordinata:* Kako bismo opisali stanje u kojem se nalazi mehanički sustav s N stupnjeva slobode, potrebno nam je N tzv. poopćenih koordinata. Vrijednost poopćenih koordinate govori nam o položaju, a njihove vremenske derivacije o brzini gibanja čestica i/ili tijela u nekom trenutku. Poopćene koordinate je moguće odabrati na različite načine, a mudar odabir može u velikoj mjeri olakšati analizu sustava koji razmatramo.

3. *Postavljanje jednadžbi gibanja za sustav:* Jednadžbe gibanja sustava s N stupnjeva slobode su skup od N općenito vezanih diferencijalnih jednadžbi u kojima se pojavljuju najviše druge derivacije poopćenih koordinata sustava po vremenu. Pri postavljanju jednadžbi gibanja uzimaju se u obzir sve sile koje djeluju na čestice odnosno tijela sustava.

4. *Analitička analiza jednadžbi gibanja (u mjeri u kojoj je to moguće):* U nekim dovoljno jednostavnim slučajevima moguće je pronaći analitička rješenja jednadžbi gibanja. Također je moguće prepoznati konstante gibanja, odnosno veličine koje tijekom gibanja ne mijenjaju svoju vrijednost (tvrdnje o očuvanju nekih veličina još zovemo zakonima očuvanja). Naravno, u većini realističnih i složenih situacija analitičke metode su same po sebi ograničenog dosega, a ulogu imaju i ograničena u našoj vlastitoj matematičkoj pripremljenosti.

5. *Odabir početnih uvjeta:* U onim slučajevima u kojima je opće rješenje jednadžbi gibanja dostupno u analitičkom obliku, u njemu se pojavljuju neodređene konstante čija vrijednost proizlazi iz vrijednosti poopćenih koordinata i njihovih vremenskih derivacija u nekom početnom trenutku. Skup vrijednosti svih poopćenih koordinata i njihovih vremenskih derivacija u neko početnom trenutku zovemo početnim

uvjetima. Uvrstimo li početne uvjete u opće rješenje jednadžbe gibanja dobivamo analitičke izraze koji opisuju vremesku ovisnost svake poopćene koordinate.

6. *Numerička analiza jednadžbi gibanja (simulacija):* Jednadžbe gibanja moguće riještiti numeričkim postupcima, ali za razliku od općeg analitičkog rješenja, numeričko rješenje je moguće doboti isključivo za unaprijed odabran skup početnih uvjeta. Dakako, varirajući početne uvjete moguće je istražiti rješenja koja su u nekoj situaciji od praktičnog interesa.

Lagrangeov formalizam pomaže nam pri postavljanju jednadžbi gibanja sustava, dakle u točki 3. gornjeg popisa, a dijelom i pri njihovoj analitičkoj analizi, što je točka 4. gornjeg popisa. Razlikuje se od pristupa koji se izravno oslanja na primjenu Newtonovih zakona po tome što polazi od kinetičke i potencijalne energije sustava, u mnogim situacijama znatno je jednostavniji u provedbi i olakšava nam prepoznavanje konstanti gibanja u razmatranom sustavu.

U nastavku ovog "predavanja" dat će se kratke upute za korištenje Lagrangeovog formalizma, dok ulaženje u potankosti njegove matematičke pozadine poznate kao varijacijski princip ostavljamo za neku drugu priliku.

1.2 Lagrangeov formalizam

U sustavu s N stupnjeva slobode poopćene koordinate neka su

$$q_i, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

Pretpostavljamo da se ukupnu potencijalnu energiju sustava može izraziti kao funkciju sviju poopćenih koordinata,

$$U = U(q_1, \ldots, q_N), \tag{2}$$

a isto tako pretpostavljamo da se ukupnu kinetičku energiju može izraziti s

$$K = K(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N; q_1, \ldots, q_N). \tag{3}$$

gdje su $\dot{q}_i$ vremenske derivacije poopćenih koordinata. Razliku kinetičke i potencijalne energije sustava zovemo Lagrangijanom (lagranžijanom) sustava,

$$L = K - U. \tag{4}$$

Tzv. Lagrangeove jednadžbe gibanja sustava su

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Iako su dobivene na potpuno drugačiji način, Lagrangeove jednadžbe gibanja istovjetne su jednadžbama gibanja koje bismo dobili izravnom primjenom Newtonovih zakona. Nadalje, ako za neku od poopćenih koordinata vrijedi

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{6}$$

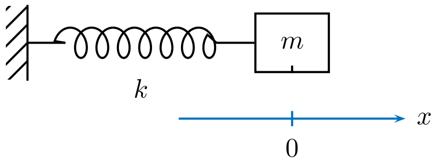
onda je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \mathrm{const.} \tag{7}$$

konstanta gibanja (očuvana veličina) u promatranom sustavu.

1.3 Harmonički oscilator kao prvi primjer

Kao prvi primjer razmotrit ćemo vjerojatno najpoznatiji, najjednostavniji, a opet izuzetno važan slučaj tijela mase m koje se može gibati duž pravca i koje je oprugom konstante k povezano s čvrstim uporištem na istom pravcu.



Jednadžba gibanja tijela dobro je poznata i glasi

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \text{gdje je} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{8}$$

Kao što je također dobro poznato, rješenje te jednadžbe gibanja je harmoničko titranje oko ravnotežnog položaja $x = 0$ kutnom frekvencijom ω_0,

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \tag{9}$$

gdje su konstante A i ϕ određene početnim uvjetima u nekom trenutku t_0, a to su ovdje $x(t_0)$ i $x'(t_0)$.[1]

Ovdje ćemo tu jednadžbu gibanja harmonijskog oscilatora (8) izvesti na tri različita načina:

1. *Izravna primjena drugog Newtonovog zakona:* Uzmemo li da se tijelo giba duž x-osi, s lijeve strane znaka jednakosti možemo napisati umnožak mase tijela i x-komponente njegove akceleracije, a s desne strane x-komponentu sile opruge, $F_x = -kx$,

$$ma_x = -kx. \tag{10}$$

   Pišući $a_x = \ddot{x}$ i dijeleći s m dobivamo upravo (8).

2. *Primjena načela očuvanja mehaničke energije:* Kinetička i potencijalna energija tijela mase m na opruzi konstante k su

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad U = \frac{1}{2}kx^2. \tag{11}$$

   Mehanička energija je prema tome

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \tag{12}$$

   a s obzirom da u ovom jednostavnom mehaničkom sustavu nije prisutan niti jedan mehanizam kojim bi došlo do pretvorbe mehaničke energije u druge oblike energije, očekujemo da je mehanička energija očuvana veličina, odnosno

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = m\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right). \tag{13}$$

   Gornji uvjet je ispunjen ako je $\dot{x} = 0$, što nije zanimljivo jer isključuje mogućnost gibanja. Druga mogućnost je da izraz u zagradama bude jednak nuli, što je upravo jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora (8).

[1] Vidi poglavlje 6.2 u `http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.pdf`

3. *Lagrangeov formalizam:* Sustav ima samo jedan stupanj slobode i kao najočigledniji odabir poopćene koordinate nameće se sama x-koordinata tijela. Lagrangian sustava tada je

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \tag{14}$$

a članovi u Lagrangeovoj jednadžbi (5) su

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{x} = m\ddot{x} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx. \tag{15}$$

Sama Lagrangeova jednadžba glasi $m\ddot{x} + kx = 0$ što je upravo očekivani rezultat (8).

U ovom jednostavnom i svima dobro poznatom primjeru prednosti Lagrangeovog formalizma pred drugim pristupima u izvođenju jednadžbe gibanja nisu još došle do izražaja. Primjer je imao za cilj pokazati da se na različite načine dolazi do istovjetne jednadžbe gibanja.

1.4 Zadaci

1. Matematičko njihalo je sitno tijelo (čestica) obješeno o čvrsto uporište tankom, bezmasenom nerastezljivom niti duljine ℓ, a razmatra se isključivo gibanje u odabranoj uspravnoj ravnini.[2] Bez da pretpostavite da je riječ isključivo o malenim otklonima od ravnoteže, napišite Lagrangian matematičkog njihala i izvedite Lagrangeovu jednadžbu gibanja. Kao poopćenu koordinatu odaberite kut otklona od ravnoteže θ.

2. Lagrangeovim formalizmom izvedite jednadžbu gibanja za kotrljanje bez klizanja tankog obruča niz kosinu nagiba α uz dva različita odabira poopćene koordinate:

   - $q = \theta$, kut zakreta obruča u odnosu na neki referentni položaj
   - $q = x$, x-koordinata središta (mase) obruča pri čemu je x-os orijentirana tako da se središte obruča giba duž nje.

   Moment tromosti tankog obruča mase m i polumjera a u odnosu na os simetrije je $I^* = ma^2$.

[2] Vidi primjer 4.4.2 u `http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.pdf`

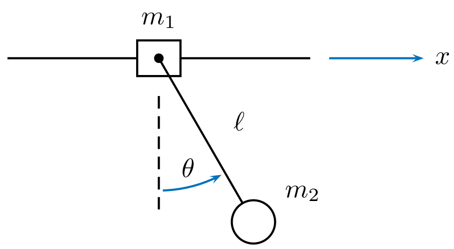
2 Drugi dio

2.1 Primjer sustava s dva stupnja slobode

Ovaj primjer pokazat će primjenu Lagrangeovog formalizma u slučaju u kojem bi izravna primjena drugog Newtonovog zakona zahtijevala kompliciraniji postupak. Ovaj primjer će također pokazati način na koji Lagrangeov formalizam razotkriva očuvanu veličinu u sustavu.

Neka tijelo mase m_1 klizi bez otpora po vodoravnoj tračnici, a s njega visi tijelo mase m_2 poput matematičkog njihala. Duljina niti njihala neka je ℓ.

Izvest ćemo jednadžbe gibanja ovog sustava korištenjem Lagrangeovog formalizma.



Sustav ima $N = 2$ stupnja slobode, a kao poopćene koordinate odabiremo $q_1 = x$, x-koordinatu tijela mase m_1, i $q_2 = \theta$, kut otklona njihala od uspravne osi.

Kako bismo napisali kinetičku energiju sustava najprije zapisujemo brzine tijela. Vektor brzine klizača se može očigledno izraziti s

$$\mathbf{v}_1 = \dot{x}\,\mathbf{i}. \tag{16}$$

Vektor brzine njihala možemo izraziti kao zbroj brzine klizača na kojem tijelo visi i vektora brzine tijela mase m_2 koju to tijelo ima u referentnom okviru klizača.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \ell\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}, \tag{17}$$

gdje je

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \tag{18}$$

jedinični vektor koji gleda u smjeru koji odgovara pomaku $\mathrm{d}\theta$. Slijedi

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{x} + \ell\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{i} + \ell\dot{\theta}\sin\theta\,\mathbf{j}. \tag{19}$$

Kinetičke energije tijela sada su

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2, \qquad K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \cdots = \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\right) \tag{20}$$

Potencijalna energija sustava sastoji se isključivo od gravitacijske potencijalne energije njihala, odn. tijela mase m_2 koje se pri otklonu njihala θ uspinje na visinu $\ell(1-\cos\theta)$ u odnosu na ravnotežni (najniži) položaj,

$$U_2 = m_2 g\ell(1-\cos\theta). \tag{21}$$

Lagrangijan sustava sada je

$$L = K - U = K_1 + K_2 - U_2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}m_2\ell^2\dot{\theta}^2 - m_2 g\ell(1-\cos\theta). \tag{22}$$

Najprije razmatramo stupanj slobode $q_1 = x$. Nalazimo

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

a to znači da je u ovom sustavu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 \ell \dot{\theta} \cos\theta = \text{konst} \tag{24}$$

konstanta gibanja, odn. očuvana veličina. Pogledamo li malo bolje gornji izraz, prepoznajemo da se radi o x-komponenti količine gibanja u ovom sustavu, a s obzirom da ovdje nisu prisutne vanjske sile čija bi x-komponenta bila različita od nule, taj rezultat je u skladu sa zakonon očuvanja količine gibanja u sustavima čestica.

Analizu nastavljamo razmatranjem Lagrangeove jednadžbe za stupanj slobode $q_2 = \theta$. Članovi u Lagrangeovoj jednadžbi su

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \sin\theta - m_2 \ell g \sin\theta = -m_2 \ell (\dot{x}\dot{\theta} + g) \sin\theta \tag{25}$$

i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m_2 \ell \dot{x} \cos\theta + m_2 \ell^2 \dot{\theta} \right) = m_2 \ell \ddot{x} \cos\theta - m_2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \sin\theta + m_2 \ell^2 \ddot{\theta}, \tag{26}$$

te samu Lagrangeovu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\ddot{x} \cos\theta + g \sin\theta + \ell \ddot{\theta} = 0. \tag{27}$$

Odaberemo li u zakonu očuvanja (24) nulu kao vrijednost konstante gibanja, a to odgovara situaciji u kojoj se središte mase sustava ne pomiče duž x-osi, zakon očuvanja glasi

$$(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 \ell \dot{\theta} \cos\theta = 0. \tag{28}$$

Jednadžbe (27) i (28) čine sustav vezanih diferencijalnih jednadžbi koje smatramo jednadžbama gibanja ovog sustava.

Prisutnost konstante gibanja, odn. jednadžba (28), omogućuje nam da jednu od dviju poopćenih koordinata eliminiramo iz sustava. Deriviranjem jednadžbe (28) imamo

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 \ell}{m_1 + m_2} \left(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta \right), \tag{29}$$

a uvrštavanjem tog izraza (27) dobivamo diferencijalnu jednadžbu u kojoj se pojavljuje samo poopćena koordinata θ i naravno njene derivacije. Ta jednadžba glasi:

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2\theta \right) \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta = 0. \tag{30}$$

Kao gruba provjera ispravnosti gornje jednadžbe gibanja može nam poslužiti limes $m_1 \to \infty$. U tom limesu klizač se gotovo uopće ne bi gibao, a njihalo bi se ponašalo poput matematičkog njihala. Lako je pokazati da u spomenutom limesu gornja jednadžba gibanja prelazi u jednadžbu gibanja jednostavnog matematičkog njihala.

2.2 Nekonzervativne sile, funkcija snage

Potencijalna energija jest funkcija kojom opisujemo tzv. konzervativne sile, odnosno sile čije djelovanje ne dovodi do promjene u mehaničkoj energiji sustava. Sile koje nemaju to svojstvo zovemo nekonzervativnim silama i ne možemo im pridružiti potencijalnu energiju. To također znači da one nisu uključene u Lagrangeov formalizam u njegovom osnovnom obliku. Ovdje opisujemo proširenje Lagrangeovog formalizma koje omogućuje uključenje nekonzervativnih sila.

Neka je

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \tag{31}$$

nekonzervativna sila koja ovisi o položaju $\mathbf{r}$, brzini čestice $\mathbf{v}$ i o vremenu t. Pridružujemo joj tzv. funkciju snage definiranu s

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} F(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}', \tag{32}$$

gdje je $\mathbf{v}_0$ proizvoljna referentna brzina. Lagrangeove jednadžbe glase

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{33}$$

gdje je P tzv. ukupna funkcija snage, odnosno zbroj funkcija snage pridruženih svim nekonzervativnim silama u sustavu.

Na primjer, ako na česticu koja se giba u trodimenzionalnom prostoru djeluje nekonzervativna sila oblika

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = -b\mathbf{v}, \tag{34}$$

gdje je $b > 0$, a $\mathbf{v}$ je brzina čestice (prepoznajemo da se radi o sili otpora razmjernoj brzini), pridružena funkcija snage je

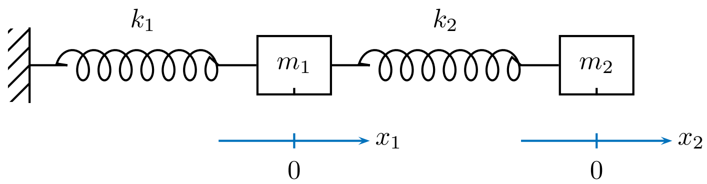
$$P[\mathbf{v}] = \int^{\mathbf{v}} \mathbf{F}(\mathbf{v}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}' = -b \int_0^{\mathbf{v}} \mathbf{v}' \cdot \mathrm{d}\mathbf{v}' = -b\frac{v^2}{2}. \tag{35}$$

2.3 Zadaci

1. Pažljivo pročitajte 2.1 i provjerite je li se slučajno potkrala kakva pogreška u izvodu jednadžbe gibanja klizača s njihalom. Ako jest, molim javite mi da ju otklonim. (Ovdje ne morate ništa slikati i slati.)
2. (Neobavezan zadatak) Numerički integrirajte jednadžbe gibanja klizača s njihalom (28) i (30) za slučaj $m_1 = m_2$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ i $\ell = 1\,\mathrm{m}$ uz početne uvjete $x = 0$, $\dot{\theta} = 0$ i

   $$\theta = \frac{1}{8}\pi \qquad \text{i} \qquad \theta_0 = \frac{7}{8}\pi,$$

   koji odgovaraju vrlo malenom početnom otklonu i vrlo velikom početnom otklonu (kod početnog otklona većeg od $\pi/2$ pretpostavljamo da je nit kruta, odn. da se radi o brzmasenoj krutoj šipki). Nacrtajte graf ovisnosti $x(t)$ i $\theta(t)$ za oba slučaja. (Uslikajte mobitelom ekran, ne brinite o formi.)
3. Izvedite Lagrangeovim formalizmom jednadžbe gibanja za sustav sa slike:

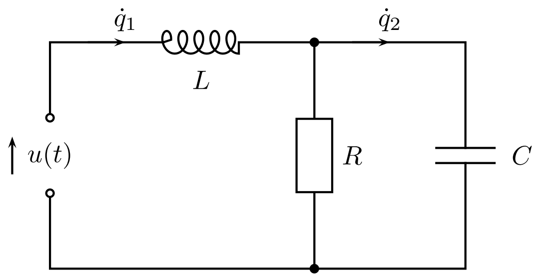
   Trebali biste dobiti jednadžbe iz primjera 6.8.3 u `http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.pdf`
4. Lagrangeovim formalizmom i korištenjem odgovarajuće funkcije snage izvedite jednadžbu gibanja prigušenog oscilatora (vidi poglavlje 6.5 u `http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.pdf`).

3 Treći dio

3.1 Električni krugovi s koncentriranim elementima

Primjena Lagrangeovog formalizma na električne krugove slijedi obrazac koji smo upoznali u mehanici. U električnom krugu najprije ustanovljavamo broj stupnjeva slobode i odabiremo poopćene koordinate. Kao poopćene koordinate najčešće odabiremo električne naboje q_i, $i = 1, \ldots, N$, koji su počevši od nekog referentnog trenutka protekli određenim točkama u električnom krugu. Vremenske derivacije poopćenih koordinata q_i tada su električne struje $i_i = \dot{q}_i$.[3]

Kao primjer uzmimo električni krug s dva stupnja slobode koji sadrži naponski izvor $u(t)$, induktivitet L, otpornik R i kondenzator C:



Kao poopćene koordinate možemo odabrati naboje protekle dvjema horizontalnim granama pri vrhu crteža, a na samom crtežu označavamo odgovarajuće struje i njihov pozitivan smjer. Struja koja protječe otpornikom ovdje je, prema Kirchoffovu zakonu za struje (zakon očuvanja električnog naboja), $\dot{q}_1 - \dot{q}_2$.

U električnim krugovima s koncentriranim elementima (engl. *lumped elements*), a to su ovdje otpornik, induktivitet, kondenzator i naponski izvor, svakome od njih pridružujemo potencijalnu energiju, kinetičku energiju ili funkciju snage kako slijedi:

- *Kondenzator:* energiju električnog polja u nabijenom kondenzatoru smatramo *potencijalnim energijom* (ona je određena vrijednošću poopćene koordinate q, a ne njene vremenske koordinate $\dot{q}$). Ako je kapacitet kondenzatora C, a u njemu se nalazi naboj q, potencijalna energija dana je izrazom

$$U = \frac{1}{2C} q^2. \tag{36}$$

- *Induktivitet:* energiju magnetskog polja u induktivitetu shvaćamo kao *kinetičku energiju* (ona je određena vrijednošću struje koja teče induktivitetom, dakle vremenskom derivacijom poopćene koordinate $\dot{q}$, a ne njenom vrijednošću q). Ako induktivitetom L teče struja $\dot{q}$ kinetička energija je

$$K = \frac{L}{2} \dot{q}^2. \tag{37}$$

  Parametar L još zovemo samoinduktivitetom kako bismo ga razlikovali od međuinduktiviteta koji razmatramo kad su u sustavu prisutna dva ili više induktiviteta. Ako su L_1 i L_2 samoinduktiviteti dvaju induktiviteta kojima teku struje $\dot{q}_1$ i $\dot{q}_2$, kinetička energija je

$$K = \frac{L_1}{2} \dot{q}_1^2 + L_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{L_2}{2} \dot{q}_2^2. \tag{38}$$

  Međuinduktivitet može imati negativnu ili pozitivnu vrijednost, ovisno o definiciji smjera struja te o geometrijskom odnosu u kojem se induktiviteti nalaze. Poopćenje na veći broj induktiviteta te samim time i međuinduktiviteta smatramo očiglednim.

[3] Točkica na i je prisutna jer to slovo ima točkicu, dok točkica na $\dot{q}$ označava vremensku derivaciju veličine q, sorry, tako je, kako je.

- *Otpornik:* Svakom otporniku u krugu odgovara *funkcija snage*

$$P = -\frac{1}{2}R\dot{q}^2, \tag{39}$$

gdje je R otpor otpornika, a $\dot{q}$ je struja koja njime teče.

- *Naponski izvor:* Naponskom izvoru u koji ovisi o vremenu pridružujemo potencijalnu energiju

$$U = -uq, \tag{40}$$

gdje je q naboj koji je potekao iz tog naposkog izvora počevši od nekog početnog (referentnog) trenutka. (Uobičajeno je naboj q odabrati kao jednu od poopćenih koordinata u sustavu).

Lagrangeove jednadžbe gibanja u električnom krugu s N stupnjeva slobode i poopćenim koordinatama (nabojima) q_i, $i = 1, \ldots, N$ su kao i u mehanici dane s (33)

3.2 Zadaci

1. Analizirajte električni krug koji smo koristili kao primjer metodama koje ste upoznali na Osnovama elektrotehnike i drugim predmetima. Izvedite jednadžbe gibanja za struje $i_1 = \dot{q}_1$ i $i_2 = \dot{q}_2$ (to su diferencijalne jednadžbe u kojima se pojavljuju druge derivacije naboja, dakle $\ddot{q}_1$ i $\ddot{q}_2$).
2. Analizirajte isti električni krug Lagrangeovim formalizmom. Morali biste dobiti iste jednadžbe gibanja (izraze za $\ddot{q}_1$ i $\ddot{q}_2$) kao i u prethodnom zadatku.
3. Analizirajte isti električni krug Lagrangeovim formalizmom, ali ovaj puta na takav način da naponskom izvoru ne pridružite potencijalnu energiju prema pravilu (40), već da joj pridružite funkciju snage

$$P = u\dot{q}_1. \tag{41}$$

Radi se o alternativnom pristupu za uključenje naponskog izvora. I ovdje biste morali dobiti iste jednadžbe gibanja kao i u prethodnim zadacima.

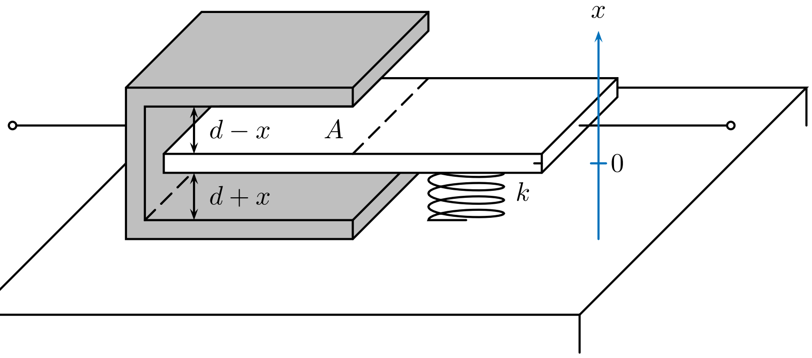
4 Četvrti dio

4.1 Elektromehanički sustavi

U prethodnim predavanjima upoznali smo Lagrangeov formalizam i činjenicu da ga se bez izmjena može primijeniti na mehaničke sustave kao i na električne krugove. U oba slučaja svakom stupnju slobode pridružujemo poopćenu koordinatu, a Lagrangeov formalizam nam za svaku poopćenu koordinatu daje odgovarajuću jednadžbu gibanja (diferencijalnu jednadžbu drugog reda u poopćenoj kooordinati).

4.2 Primjer: Kapacitivni pretvornik u ulozi akcelerometra

Razmotrit ćemo idealizirani kondenzator čije su elektrode paralelne vodljive ploče koje se jedna u odnosu na drugu mogu pomicati.



Vanjska ploča kondenzatora (na crtežu prikazana sivom bojom) učvršćena je za kučište, dok je unutarnja ploča kondenzatora (na crtežu bijele boje) za kučište vezana oprugom i može se paralelno pomicati u smjeru x-osi. Podrazumijevamo da su obje elektrode električki izolirane od kučišta te imaju vlastite priključke. Zbog jednostavnosti uzimamo da sila teža nije prisutna, a stanje kondenzatora pri kojem su oba razmaka među pločama međusobno jednaka (tj. $x = 0$) uzimamo kao ravnotežno stanje ne-nabijenog kondenzatora. Frekvencija mehaničkog titranja središnje ploče u ne-nabijenom kondenzatoru dana je poznatim izrazom

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}. \tag{42}$$

Ako je debljina zračnog razmaka među pločama razmjerno malena u usporedbi s veličinom ploča, odnosno, ako vrijedi $d \ll \sqrt{A}$, gdje je A efektivna površina ploča, onda kapacitet kondenzatora u ravnotežnom stanju možemo izraziti s

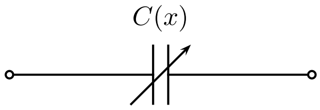
$$C_0 = \epsilon_0 \frac{2A}{d}, \tag{43}$$

gdje je faktor 2 prisutan zbog geometrije kondenzatora. Ako je središnja ploča pomaknuta iz ravnotežnog položaja, kapacitet kondenzatora možemo izraziti kao zbroj dvaju kapaciteta,

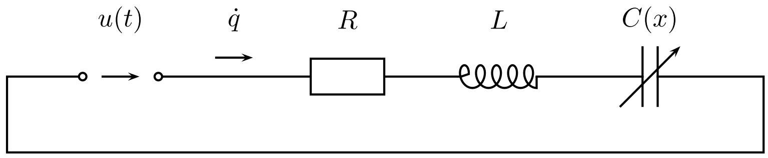
$$C(x) = \epsilon_0 \frac{A}{d - x} + \epsilon_0 \frac{A}{d + x} = \epsilon_0 \frac{2Ad}{d^2 - x^2} = \frac{C_0}{1 - (x/d)^2}. \tag{44}$$

Konačni rezultat je izražen s pomoću kapaciteta u ravnoteži C_0, a uočavamo da se kapacitet povećava s pomakom središnje ploče bilo na jednu, bilo na drugu stranu, te da teži u beskonačno kad $x \to \pm d$.[4] Električni krug koji odgovara gornjem crtežu sastoji se od jednog jedinog koncentriranog elementa koji shvaćamo kao kondenzator čiji kapacitet ovisi o mehaničkom stupnju slobode x. Možemo ga prikazati simbolom

[4] Ovakav kondenzator je u literaturi poznat kao *variable gap capacitor*. Kad bismo umjesto pomaka u smjeru x-osi dopustili pomak koji "izvlači" središnju ploču iz prostora među vanjskim pločama, dobili bismo tzv. *variable area capacitor*.



Elektromehanički akcelerometar je uređaj koji akceleraciju uređaja na koji je pričvršćen pretvara u mjerljiv električni signal. Akcelerometar možemo zamisliti kao gore opisani kondenzator ravnotežnog kapaciteta C_0 spojen u električni krug koji sadrži naponski izvor $u(t)$, otpornik R i induktivitet L, dok bismo na mehaničkoj strani osim mase pomične ploče m i opruge konstante k uzimamo u obzir i mehaničko prigušenje silom oblika $F_x = -b\dot{x}$.



Prepoznajemo da sustav ima jedan električni i jedan mehanički stupanj slobode. Kao poopćene koordinate odabiremo naboj q koji je potekao iz izvora počevši od nekog početnog trenutka te x-koordinatu pomične ploče kondenzatora. Kinetička energija sustava je

$$K = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \tag{45}$$

Potencijalna energija sustava je

$$U = -uq + \frac{1}{2C(x)}q^2 + \frac{1}{2}kx^2, \tag{46}$$

gdje je ovisnost kapaciteta C o koordinati x dana s (44). Prisutnost akceleracije kučišta uvodimo kao inercijsku silu koja djeluje na tijela u sustavu.[5] Ako je A_x x-komponenta akceleracije kučišta u inercijskom referentnom okviru, onda je x-komponenta inercijske sila koja djeluje na pomičnu elektrodu $F_x = -mA_x$, a odgovara joj funkcija snage

$$P_A = -mA_x\dot{x}. \tag{47}$$

Ukupna funkcija snage sustava je

$$P = -\frac{1}{2}r\dot{q}^2 - \frac{1}{2}b\dot{x}^2 - mA_x\dot{x}. \tag{48}$$

Lagrangeove jednadžbe gibanja za q i x su

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C(x)} = u \qquad \text{i} \qquad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -mA_x + \frac{qC'(x)}{2C^2(x)}, \tag{49}$$

gdje je $C'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C(x)$. Gornje jednadžbe napisane su na takav način da s lijeve strane imamo uobičajene članove koji čine jednadžbe gibanja električnog i mehaničkog oscilatora, dok s desne strane imamo članove koji povezuju električni i mehanički sektor.

Na žalost, analizu tih jednadžbi moramo ostaviti za neki povoljniji trenutak.

[5] Vidi poglavlje 12 u `http://sail.zpf.fer.hr/labs/mehanika2.html` (nije gradivo kolegija fizike u programu FER3).

4.3 Zadaci

1. Izvedite izraz za frekvenciju mehaničkog titranja pomične ploče kondenzatora u slučaju u kojem je kondenzator opisan u 4.2 početno nabijen nabojem q_0, a zatim je električki izoliran od okoline (naboj na pločama kondenzatora je stalan). Pretpostavljamo da je akceleracija kućišta jednaka nuli.

   Odredite kritičnu vrijednost $|q_0|$ pri kojoj sustav postaje nestabilan.

2. Izvedite izraz za frekvenciju mehaničkog titranja malom amplitudom u slučaju u kojem je kondenzator iz 4.2 spojen na napon stalnog iznosa u_0.

   Odredite kritičnu vrijednost napona $|u_0|$ pri kojoj sustav postaje nestabilan.

3. (Neobavezni zadatak) Jedan od načina modeliranja učinka koji bi imao nagli trzaj kućišta jest da pretpostavimo da se uređaj gibao brzinom stalnog iznosa v_0 u smjeru x-osi te da se u nekom trenutku naglo zaustavio. U intervalu vremena koji slijedi akceleracija kućišta jednaka je nuli, a na samom početku tog intervala središnja ploča ima brzinu koju je neposredno prije zaustavljanja kućišta imalo samo kućište. To znači da učinak naglog zaustavljanja modeliramo početnim uvjetom na $\dot{x}$.

   Numerički integrirajte jednadžbe gibanja akcelerometra sa slike (sustav koji uključuje L, R, b i konstantni napon $u > u_0$) i izračunajte napon na samom kondenzatoru. Pokušajte pronaći skup parametara

   $$C_0, \quad d, \quad L, \quad R, \quad b, \quad u_0,$$

   koji jasno pokazuje odziv akcelerometra na naglo zaustavljanje kućišta.