

Saša Ilijić

# Elektromagnetizam — skripta — radna verzija

Posljednja izmjena: 30. kolovoza 2023.

URL: <http://sail.zpf.fer.hr/labs/elektromagnetizam.pdf>

Četiri poglavlja ove nedovršene skripte pokrivaju gradivo iz Elektromagnetizma koje se predaje od 9. do 12. tjedna (od ukupno 13 tjedana) nastave predmeta *Fizika*. Očekivani tempo obrade gradiva je jedno poglavlje tjedno.

Na mnogim mjestima skripta je nedovršena, ali tijekom semestra se nadam popuniti većinu praznina i ukloniti nedostatke kojih nedvojbeno ima i kojih sam svjestan.

**Važno upozorenje:** Polje  $\mathbf{B}$  u ovom tekstu zovemo *magnetskim poljem* čime slijedimo konvenciju koja se koristi u sveučilišnoj literaturi iz fizike. Ta konvencija se razlikuje od konvencije koja se koristi u literaturi iz elektrotehnike i u srednjoškolskoj literaturi iz fizike, a u kojoj se to polje zove *magnetskom indukcijom*. Polje  $\mathbf{H}$  nije gradivo predmeta *Fizika* te se ono u ovom tekstu ne spominje.

Molim studente koji uoče pogreške i nejasnoće da me o tome obavijeste (hvala!).

## Sadržaj

<b>1</b>	<b>Električni naboj i električno i magnetsko polje</b>	<b>2</b>
1.1	Električna i magnetska svojstva materije . . . . .	2
1.2	Električno i magnetsko polje . . . . .	5
1.3	Coulombov zakon i elektrostatika . . . . .	10
1.4	Biot–Savartovo pravilo i magnetostatika . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Matematički formalizam</b>	<b>24</b>
2.1	Skalarna i vektorska polja . . . . .	24
2.2	Integral vektorskog polja po krivulji . . . . .	24
2.3	Integral vektorskog polja po plohi . . . . .	26
2.4	Integral skalarnog polja po volumenu . . . . .	28
2.5	Gradijent skalarnog polja i teorem o gradijentu . . . . .	29
2.6	Divergencija vektorskog polja i teorem o divergenciji (Gaussov teorem) . . . . .	30
2.7	Rotacija vektorskog polja i teorem o rotaciji (Stokesov teorem) . . . . .	32
2.8	Konzervativnost vektorskog polja i elektrostatski potencijal . . . . .	35
2.9	Operator nabra, Laplaceov operator i pregled općih identiteta . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Maxwellove jednadžbe i zakoni elektromagnetizma</b>	<b>41</b>
3.1	Maxwellove jednadžbe i očuvanje električnog naboja . . . . .	41
3.2	Gaussovi zakoni za električno i magnetsko polje . . . . .	42
3.3	Faradayev zakon elektromagnetske indukcije . . . . .	44
3.4	Ampère–Maxwellov zakon . . . . .	47
3.5	Energija elektromagnetskog polja (Poyntingov teorem) . . . . .	50

<b>4</b>	<b>Elektromagnetski val u vakuumu</b>	<b>53</b>
4.1	Maxwellove jednačbe u vakuumu . . . . .	53
4.2	Valne jednačbe za električno i za magnetsko polje . . . . .	53
4.3	Ravni linearno polarizirani harmonijski val . . . . .	54
4.4	Općenita stanja polarizacije ravnog harmonijskog vala . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Valna optika</b>	<b>59</b>
5.1	Brzina svjetlosti u optičkom sredstvu . . . . .	59
5.2	Interferencija valova dvaju koherentnih izvora . . . . .	59
5.3	Youngov pokus . . . . .	59

# 1 Električni naboj i električno i magnetsko polje

## 1.1 Električna i magnetska svojstva materije

Prihvatimo li koncept čestice kao gradivni element materije, jedino svojstvo čestice koje je od važnosti pri opisu zakona mehanike je njena masa, dok u elektromagnetizmu ulogu još imaju električni naboj čestice i magnetski dipolni moment čestice.

**Masa čestice**, simbol  $m$  ili  $M$ , mjerna jedinica kg (kilogram), skalarna je veličina koja ima središnju ulogu u formulaciji Newtonovih zakona te pri opisu gravitacijske sile. U nerelativističkoj mehanici masa čestice veća je od nule i smatramo ju nepromjenjivom, dok je u relativističkoj mehanici dopuštena pretvorba mase u energiju i obratno. Osim toga, relativistička mehanika dopušta postojanje čestica čija je masa jednaka nuli.

**Električni naboj čestice**, ili kraće naboj čestice, simbol  $q$  ili  $Q$ , mjerna jedinica C (kulon), skalarna je veličina koja može biti pozitivna ili negativna, a ako je naboj čestice jednak nuli kažemo da je ona električki neutralna. O naboju čestice ovisi, između ostalog, smjer i iznos električnog polja u njenoj blizini, kao i smjer i iznos sile koja će na nju djelovati u električnom i magnetskom polju. Kad je riječ o elementarnim česticama, naboj elektrona je  $-e$ , naboj protona je  $+e$ , gdje je

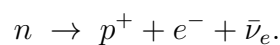
$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad (1.1)$$

tzv. *elementarni električni naboj*, dok je neutron električki neutralan. S obzirom da su atomi (ioni), molekule, te sva makroskopska tijela izgrađena od tih triju čestica, njihov je električni naboj cjelobrojni je višekratnik elementarnog naboja  $e$ . Zbog toga kažemo da je električni naboj *kvantiziran*. Ipak, s obzirom da su makroskopska tijela sastavljena od velikog broja elementarnih čestica, većinu makroskopskih pojava opisujemo tretirajući električni naboj kao kontinuiranu veličinu.

**Očuvanje električnog naboja:** U prirodi nije pronađen proces u kojem dolazi do promjene ukupnog električnog naboja promatranog sustava. Zbog toga se kaže da je električni naboj očuvana veličina.

### Primjer 1.1.1: Očuvanje električnog naboja u $\beta$ -raspadu

Neutron ( $n$ ) se može raspasti procesom poznatim kao  $\beta$ -raspad u kojem nastaju po jedan proton ( $p^+$ ), jedan elektron ( $e^-$ ) i jedan elektronski antineutrino ( $\bar{\nu}_e$ ),



S obzirom da je proton pozitivno nabijena, elektron je negativno nabijena, a antineutrino je električki neutralna čestica, ukupan električni naboj nakon raspada jednaka je nuli, što odgovara električnom naboju čestice koja se raspala.

**Točkasti naboj** (engl. *point charge*) jest uvriježeni naziv za nabijenu česticu koji koristimo u situacijama u kojima nam je od važnosti isključivo naboj čestice, a ne i njena masa. Točkasti naboji mogu biti elementarne čestice poput protona i elektrona, kao i kompleksnije strukture poput nabijenih molekula, kapljica tekućine, ili čak makroskopskih tijela.

**Gustoća naboja** (engl. *charge density*): U situacijama u kojima nije praktično voditi računa o položajima velikog broja točkastih naboja ili električki nabijenih čestica, raspored električnog naboja u prostoru opisujemo *volumnom gustoćom naboja*, koristimo simbol  $\rho$  i mjernu jedinica  $\text{C m}^{-3}$  (kulon po kubnom metru). Kad je naboj raspoređen po plohi koristi se *površinska gustoća naboja*, simbol  $\sigma$  i mjerna jedinica  $\text{C m}^{-2}$ , a kad je naboj raspoređen duž krivulje koristi se *linijska gustoća naboja*,

simbol  $\lambda$  i mjerna jedinica  $\text{C m}^{-1}$ . Ovisno o tome je li raspored naboja opisan volumnom, površinskom ili linijskom gustoćom, element naboja  $dq$  možemo izraziti kao

$$dq = \rho dV, \quad dq = \sigma dS \quad \text{ili} \quad dq = \lambda d\ell, \quad (1.2)$$

gdje je  $dV$  element volumena,  $dS$  je element plohe, a  $d\ell$  je element krivulje. Ukupan električni naboj nekog tijela je zbroj električnih naboja svih čestica od kojih se tijelo sastoji odnosno integral svih elemenata naboja od kojih se tijelo sastoji,  $q = \int dq$ .

**Primjer 1.1.2:** *Volumna, površinska i linijska gustoća naboja*

Razmotrit ćemo štap duljine  $\ell = 1 \text{ m}$  i promjera  $2r = 1 \text{ cm}$  koji je jednoliko nabijen nabojem  $q = -10 \text{ nC}$ . Najprije ćemo odrediti linijsku gustoću naboja štapa, a zatim ćemo pod odgovarajućim pretpostavkama odrediti površinsku i volumnu gustoću naboja.

- *Linijska gustoća naboja štapa je*

$$\lambda = \frac{q}{\ell} = \frac{(-10^{-8} \text{ C})}{1 \text{ m}} = -10^{-8} \text{ C m}^{-1}.$$

- Pretpostavimo li da je naboj jednoliko raspoređen po površini štapa (plaštu cilindra), pri čemu ne uzimamo u obzir njegove krajeve (baze cilindra), *površinska gustoća naboja je*

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{q}{2r\pi \times \ell} = \frac{(-10^{-8} \text{ C})}{(1 \times 10^{-2} \text{ m}) \times \pi \times (1 \text{ m})} \simeq -3.2 \times 10^{-7} \text{ C m}^{-2}.$$

- Pretpostavimo li da je naboj jednoliko raspoređen po unutrašnjosti štapa, *volumna gustoća naboja je*

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{r^2\pi \times \ell} = \frac{(-10^{-8} \text{ C})}{(0.5 \times 10^{-2} \text{ m})^2 \times \pi \times (1 \text{ m})} \simeq -1.3 \times 10^{-4} \text{ C m}^{-3}.$$

Broj elektrona u električki neutralnom štapu jednak je (nepromjenjivom) broju protona u štapu, dok naboju štapa  $q = -10 \text{ nC}$  odgovara višak od  $|q|/e \sim 6 \times 10^{10}$  elektrona u odnosu na njihov broj u neutralnom štapu. Broj protona u štapu možemo grubo procijeniti pretpostavimo li da je volumna gustoća mase štapa reda veličine  $\rho_m \sim 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ . Korištenjem približne mase nukleona (protona i neutrona)  $m_n \sim 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  te uzimajući u obzir da je masa elektrona tri reda veličine manja od mase nukleona nalazimo da se u štapu nalazi približno  $\rho_m r^2 \pi \ell / m_n \sim 5 \times 10^{25}$  nukleona, od čega su približno jedna polovina protoni. Slijedi da je u relativni višak broja elektrona u razmatranom štapu u odnosu na njegovo neutralno stanje reda veličine  $10^{-15}$  (imamo približno jedan elektron viška na njih  $10^{15}$ ).

**Električni vodiči i izolatori (dielektrici):** Materijale koji unutar sebe dopuštaju tok električnog naboja zovemo vodičima. Nosioi električnog naboja u vodičima najčešće su tzv. slobodni elektroni i šupljine (odsustvo elektrona). Izolatori ili dielektrici su materijali koji ne dopuštaju tok električnog naboja.

**Električna struja,** simbol  $I$ , mjerna jedinica A (amper) ili  $\text{C s}^{-1}$  (kulon u sekundi), skalarna je veličina koja opisuje tok naboja kroz neku plohu ili kroz neki vodič, npr. kroz tanku vodljivu žicu. Električna struja  $I$  definirana je kao omjer količine naboja  $\Delta q$  i vremena  $\Delta t$  u kojem je on protekao

kroz razmatranu plohu u limesu u kojem  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Struja  $I$  može biti pozitivna ili negativna, ovisno o predznaku naboja  $\Delta q$  te o smjeru njegovog gibanja u odnosu na dogovoreni referentni smjer.

**Gustoća električne struje**, simbol  $\mathbf{J}$ , mjerna jedinica  $\text{A m}^{-2}$  (amper po metru kvadratnom), vektorska je veličina koja opisuje gibanje električnog naboja kroz prostor. Element električne struje  $dI$  koja protječe elementom plohe čija je površina  $dS$  može se izraziti kao

$$dI = \mathbf{J} \cdot (dS \hat{\mathbf{n}}), \quad (1.4)$$

gdje je jedinični vektor  $\hat{\mathbf{n}}$  okomit na plohu, a  $\mathbf{J}$  je gustoća električne struje u točki u kojoj se element plohe nalazi. Element struje  $dI$  je pozitivan i poprima najveću vrijednost kad su  $\mathbf{J}$  i  $\hat{\mathbf{n}}$  istog smjera. Smjer vektora gustoće struje  $\mathbf{J}$  podudara se sa smjerom gibanja nosioca naboja ako je njihov naboj pozitivan, a suprotan je smjeru gibanja nosioca naboja ako je njihov naboj negativan. Kad glavninu pokretnih nosioca naboja u vodiču čine elektroni, s obzirom na to da su oni negativno nabijeni, smjer vektora  $\mathbf{J}$  i vektor srednje brzine elektrona  $\mathbf{v}$  suprotnog su smjera.

### Primjer 1.1.3: Gustoća struje i srednja brzina elektrona u bakrenoj žici

Nosioci naboja u bakrenoj žici su tzv. slobodni elektroni. Procijenit ćemo srednji iznos vektora gustoće električne struje i srednju brzinu gibanja elektrona u bakrenoj žici površine poprečnog presjeka  $S = 1 \text{ mm}^2$  kojom teče električna struja  $I = 1 \text{ A}$ .

- Srednji iznos gustoće struje računamo pretpostavljajući da je ona unutar žice svuda jednaka. Srednji iznos gustoće struje tada je

$$J = \frac{\Delta q}{\Delta t S} = \frac{I}{S} = \frac{1 \text{ A}}{1 \text{ mm}^2} = 10^6 \text{ A m}^{-2}.$$

- Srednju brzinu slobodnih elektrona možemo procijeniti pretpostavljajući da svaki atom bakra ukupnom broju slobodnih elektrona doprinosi jednim slobodnim elektronom te da se svi slobodni elektroni gibaju jednakom brzinom. Tada je broj slobodnih elektrona  $\Delta N_e$  u volumenu bakra  $\Delta V$  jednak broju samih atoma bakra u tom volumenu, a omjer  $\Delta N_e / \Delta V$  jednak je omjeru gustoće mase bakra  $\rho_{\text{Cu}} = 8960 \text{ kg m}^{-3}$  i mase atoma bakra  $m_{\text{Cu}} = 63.5 \text{ u}$ , gdje je  $u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$  atomska jedinica mase (jedna dvanaestina mase atoma  $^{12}\text{C}$ ). Tzv. brojčana gustoća slobodnih elektrona u bakru prema tome je

$$n_e = \frac{\Delta N_e}{\Delta V} = \frac{\rho_{\text{Cu}}}{m_{\text{Cu}}} = \frac{8960 \text{ kg m}^{-3}}{63.5 \times (1.66 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 8.50 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Ako se slobodni elektroni gibaju brzinom iznosa  $v$ , oni se u vremenu  $\Delta t$  pomaknu za  $v \Delta t$ , a to znači da poprečnim presjekom žice površine  $S$  u vremenu  $\Delta t$  protekne "volumen slobodnih elektrona"  $\Delta V = S v \Delta t$ . Broj elektrona u tom volumenu je  $\Delta N_e = n_e \Delta V$ , a s obzirom da je naboj naboja svakog elektrona  $-e$ , slijedi da žicom u vremenu  $\Delta t$  protekne naboj

$$|\Delta q| = e \Delta N = n_e e \Delta V = n_e e S v \Delta t.$$

Iz toga dobivamo iznos srednje brzine elektrona

$$v = \frac{|\Delta q| / \Delta t}{n_e e S} = \frac{I}{n_e e S} = \frac{1 \text{ C s}^{-1}}{(8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}) \times (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1 \text{ mm}^2)} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1}.$$

S obzirom na negativan naboj elektrona, vektori srednje gustoće struje i srednje brzine elektrona suprotnog su smjera.

**Magnetski dipolni moment čestice**, simbol  $\mathbf{m}$ , mjerna jedinica  $\text{A m}^2$  (amper metar kvadratni) vektorska je veličina koja govori o magnetskom polju koje mirna čestica stvara u svojoj okolini.

**Permanentni magnet** je tijelo koje u svojoj okolini stvara stalno magnetsko polje. Magnetsko polje permanentnog magneta posljedica je jednim dijelom korelacije u orijentaciji magnetskih dipolnih momenata čestica od kojih je tijelo izgrađeno, a jednim dijelom posljedica je gibanja nabijenih čestica unutar tijela.

**Magnetizacija materijala**, simbol  $\mathbf{M}$ , mjerna jedinica  $\text{A m}^{-1}$ , volumna je gustoća magnetskog dipolnog momenta. Element  $d\mathbf{m}$  magnetskog dipolnog momenta elementa volumena  $dV$  tijela u okolini točke u kojoj je magnetizacija dana s  $\mathbf{M}$  je  $d\mathbf{m} = \mathbf{M} dV$ , a magnetski dipolni moment čitavog tijela izražavamo integralom

$$\mathbf{m} = \int d\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV, \quad (1.5)$$

gdje se integracija provodi po unutrašnjosti tijela.

## 1.2 Električno i magnetsko polje

**Koncept polja:** Teorija elektromagnetizma oslanja se na koncept polja (engl. *field*). U matematici, polje je funkcija koja svakoj točki matematičkog prostora pridružuje neku vrijednost. Ovisno o tome pridružuje li polje točkama prostora skalarne ili vektorske vrijednosti, govorimo o skalarnom ili o vektorskom polju. U fizici, poljima opisujemo fizičke veličine koje su u svakom trenutku vremena prisutne u svim točkama fizičkog prostora. Primjer skalarnog fizičkog polja je polje temperature ili polje tlaka, a primjer vektorskog polja je polje brzine vjetra.

Pri opisu prirodnih pojava iz područja elektromagnetizmu nezaobilazno govorimo o dvama vektorskim poljima koja zovemo *električnim* i *magnetskim poljem*, a prema potrebi uvodimo i dodatna skalarna i vektorska polja. Smatramo da električno i magnetsko polje postoje u svim točkama fizičkog prostora i u svim trenucima vremena, a kad neoprezno kažemo da u nekom području prostora ili u nekom intervalu vremena električno ili magnetsko polje “nije prisutno”, ili da ga jednostavno “nema”, pravilnije bi bilo reći da je ono jednako nuli (nul-vektoru).

**Električno polje** (engl. *electric field*), simbol  $\mathbf{E}$ , mjerna jedinica  $\text{V m}^{-1}$  (volt po metru) ili  $\text{N C}^{-1}$  (njutn po kulonu), vektorsko je polje koje najčešće povezujemo s prisutnošću električnog naboja u prostoru.

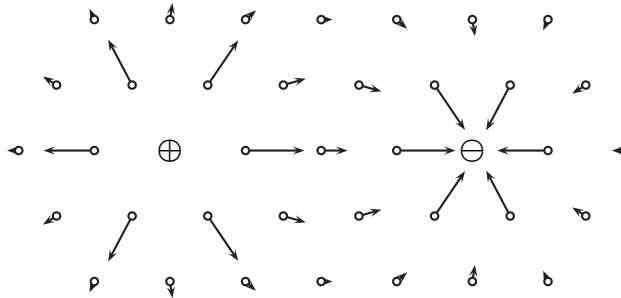
**Magnetsko polje** (engl. *magnetic field*), simbol  $\mathbf{B}$ , mjerna jedinica T (tesla), vektorsko je polje koje najčešće povezujemo s gibanjem električnog naboja, odn. s električnim strujama i s permanentnim magnetima.

### Primjer 1.2.1: Grafički prikaz vektorskog polja (električni dipol)

Osim u nekim vrlo jednostavnim situacijama, vektorsko polje u trodimenzionalnom prostoru gotovo je nemoguće prikazati dvodimenzionalnim crtežom. Poteškoće proizlaze iz činjenice da u danom trenutku vremena nacrtati možemo samo vektore u odabranom skupu točaka odabrane

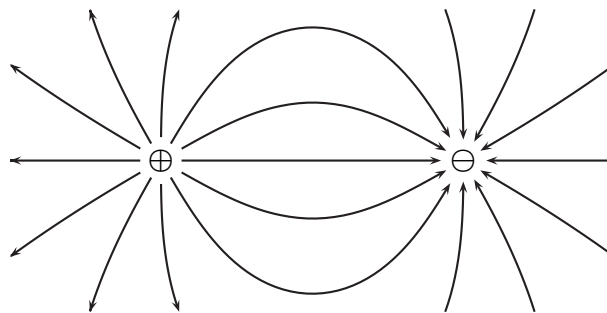
ravnine u prostoru te da pritom možemo nacrtati samo projekciju vektora na ravninu crteža, dok komponentu polja koja je okomita na tu ravninu ne možemo nacrtati.

Primjer situacije u kojoj prikaz vektorskog polja projekcijama vektora u odabranim točkama ravnine pruža donekle dobar uvid u neka svojstva polja jest električno polje dvaju točkastih naboja (električki nabijenih čestica) koji su jednaki po apsolutnoj vrijednosti, ali su suprotni po predznaku. Takva konfiguracija naboja poznata je kao *električni dipol*, a odgovarajuće električno polje zovemo poljem električnog dipola.



Pozitivno i negativno nabijena čestica označene su simbolima  $\oplus$  i  $\ominus$ . Smjer i duljina strelica prikazuju smjer i iznos električnog polja u točkama ravnine označenim kružićima. Uočavamo da je iznos električnog polja velik u blizini čestica te da se smanjuje s udaljenošću od njih. Također uočavamo da je u blizini pozitivnog naboja polje usmjereno “od naboja prema van”, dok je u blizini negativnog naboja polje usmjereno “prema naboju”. Crtanje vektora u točkama na većim udaljenostima od naboja od ovdje nacrtanih nema smisla jer strelice postaju prekratke, dok na udaljenostima manjim od nacrtanih strelice postaju predugačke. Crtanje vektora u gušćoj mreži točaka ravnine također nema smisla jer bi dovelo do preklapanja strelica i nečitljivog crteža.

Vektorsko polje se također može prikazati korištenjem tzv. “silnica” (engl. *field-lines*). Silnice su krivulje sa svojstvom da se smjer tangente na silnicu u bilo kojoj točki silnice podudara sa smjerom vektorskog polja u toj točki, a pri prikazu vektorskog polja silnicama nastoji se da razmak među susjednim silnicama bude obrnuto razmjeran iznosu vektorskog polja. Slika prikazuje silnice polja električnog dipola.



Uočavamo da su silnice usmjerene od pozitivno nabijene prema negativno nabijenoj čestici te da je razmak među silnicama malen u blizini čestica, a s udaljenošću se povećava.

**Lorentzova ili elektromagnetska sila:** Na česticu naboja  $q$  i brzine  $\mathbf{v}$  koja se nalazi u električnom polju  $\mathbf{E}$  i u magnetskom polju  $\mathbf{B}$  djeluje tzv. Lorentzova ili elektromagnetska sila

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.6)$$

Prvi član na desnoj strani gornjeg izraza zovemo električnim dijelom Lorentzove sile ili jednostavno električnom silom, dok drugi član zovemo magnetskim dijelom Lorentzove sile ili jednostavno magnetskom silom.

Smjer električnog dijela Lorentzove sile ima smjer vektora električnog polja ako je čestica pozitivno nabijena, dok za negativno nabijenu česticu električni dio Lorentzove sile ima smjer suprotan smjeru električnog polja. Magnetski dio Lorentzove sile osim o naboju čestice i magnetskom polju ovisi i o brzini čestice. Ako nabijena čestica miruje ili ako se giba u smjeru magnetskog polja magnetski dio Lorentzove sile jednak je nuli. U svim ostalim slučajevima smjer magnetskog dijela Lorentzove sile okomit je na brzinu čestice kao i na ravninu koju razapinju vektor brzine čestice i vektor magnetskog polja. Okomitost sile na brzinu znači da magnetski dio Lorentzove sile djelujući na česticu ne obavlja rad te time ne mijenja njenu kinetičku energiju.

**Jednadžba gibanja nabijene čestice:** Newtonova jednadžba gibanja čestice mase  $m$ , naboja  $q$  i brzine  $\mathbf{v}$  u električnom polju  $\mathbf{E}$  i magnetskom polju  $\mathbf{B}$  glasi

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.7)$$

gdje je  $\mathbf{p}$  količina gibanja čestice. Pri brzinama bliskim brzini svjetlosti koristi se relativistički izraz za količinu gibanja  $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ , gdje je  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  Lorentzov faktor. Pri brzinama koje su znatno manje od brzine svjetlosti koristimo nerelativistički izraz  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  koji nam omogućuje da jednadžbu gibanja napišemo i u obliku

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.8)$$

gdje je  $\mathbf{a}$  akceleracija čestice.

**Gibanje u homogenom električnom polju:** Kad kažemo da je električno polje  $\mathbf{E}$  u nekom području prostora homogeno, podrazumijevamo da polje u svim točkama tog područja ima isti iznos i isti smjer. Pretpostavimo li nadalje da je u tom području prostora magnetsko polje jednako nuli te da je brzina čestice znatno manja od brzine svjetlosti, iz nerelativističkog oblika iz Newtonove jednadžbe gibanja (1.8) čestice mase  $m$  i naboja  $q$  slijedi da se čestica giba sa stalnom akceleracijom  $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$ . Ako su  $\mathbf{r}_0$  i  $\mathbf{v}_0$  početni položaj i brzina čestice u trenutku  $t = t_0$ , položaj čestice dan je izrazom za jednoliko ubrzano gibanje

$$\mathbf{r}[t] = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{q\mathbf{E}}{2m}(t - t_0)^2. \quad (1.9)$$

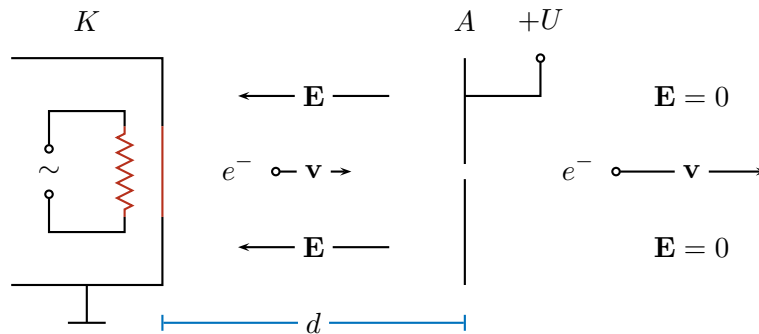
Strogo govoreći, homogeno električno polje ne postoji ni u prirodi ni u tehnici, ali u nizu situacija iz praktičnih razloga stvarno polje modeliramo homogenim poljem. Najpoznatiji primjer stvarnog električnog polja koje možemo modelirati homogenim poljem je polje među paralelnim pločama (elektrodama) nabijenog kondenzatora. Kao što ćemo pokazati u odjeljku ??, ako je razlika električnog potencijala (napona) među elektrodama  $U$ , a razmak među elektrodama je  $d$ , homogeno električno polje kojime modeliramo stvarno električno polje među elektrodama okomito je na elektrode i ima iznos  $E = U/d$ .

### Primjer 1.2.2: Elektronski top

Elektronski top (engl. *electron gun*) je uređaj koji stvara snop elektrona željene kinetičke energije. Uređaj se sastoji od dviju elektroda koje se nalaze u vakuumu. U prostoru među elektrodama



električno polje  $\mathbf{E}$  usmjereno je od anode ( $A$ ) prema katodi ( $K$ ) i možemo ga smatrati homogenim. Ako je  $d$  razmak među elektrodama, katoda je uzemljena, a anoda je priključena na napon  $U$ , iznos električnog polja među elektrodama je  $E = U/d$ . Izvan tog područja smatramo da je električno polje jednako nuli. Katoda je užarena zbog čega elektroni napuštaju njenu površinu, a nakon što ju napuste, električno polje ih ubrzava prema anodi. Većina ubrzanih elektrona sudara se s anodom, dok neki od njih nailaze na maleni otvor u anodi, prolaze kroz njega i nastavljaju se gibati u uskom snopu brzinom koju su poprimili neposredno prije prolaska kroz otvor. Slika prikazuje elektronski top te jedan elektron (oznaka  $e^-$ ) prije i jedan elektron nakon prolaska otvorom u anodi.



Djelujući na elektron (masa  $m_e$ , naboj  $-e$ ) za koji smatramo da je početno mirovao u blizini katode, a potom se pod djelovanjem električne sile iznosa  $F = eE$  gibao do anode, električna sila obavlja rad

$$W = Fd = eEd = eU.$$

Poistovjetimo li taj rad s kinetičkom energijom  $K$  elektrona u snopu, korištenjem nerelativističkog izraza  $K = m_e v_e^2 / 2 = eU$  nalazimo da je iznos brzine elektrona u snopu

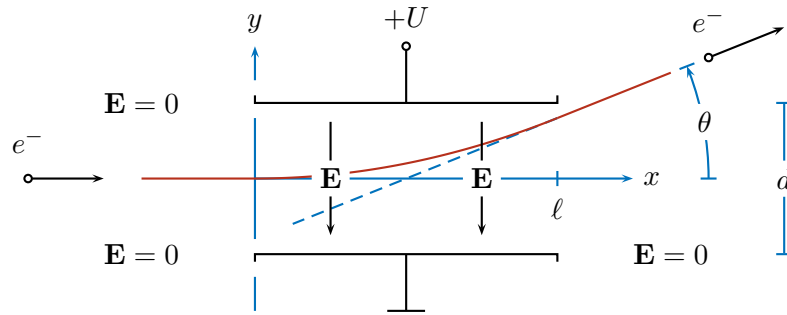
$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}},$$

gdje je  $m_e$  masa elektrona.

*Napomena:* Snop elektrona ubrzanih elektronskim topom naziva se katodnom zrakom (engl. *cathode ray*), a uređaj koji koristi takav snop, otklonske sustave i fosforescentni zaslon za stvaranje slike zovemo katodnom cijevi (CRT, engl. *cathode ray tube*).

### Primjer 1.2.3: Otklonski sustav s električnim poljem

Promjenu smjera snopa elektrona možemo postići propuštanjem snopa kroz električno polje koje je okomito na snop. Slika prikazuje otklonski sustav koji se sastoji od dviju paralelnih elektroda duljine  $\ell$  na razmaku  $d$ . Ako je jedna elektroda uzemljena, a druga je priključena na napon  $U$ , električno polje  $\mathbf{E}$  među elektrodama možemo smatrati homogenim poljem jakosti  $E = U/d$ .



Kako bismo odredili ovisnost kuta otklona  $\theta$  o parametrima  $U$ ,  $d$ ,  $\ell$  i o početnoj brzini elektrona  $v_0$  uzimamo da je elektron ušao u otklonski sustav u  $t = 0$  pri  $x = y = 0$  (koordinatni sustav postavljen kao na slici) te korištenjem (1.9) nalazimo koordinate položaja elektrona

$$x[t] = v_0 t, \quad i \quad y[t] = \frac{eE}{2m_e} t^2 = \frac{eU}{2m_e d} t^2.$$

Eliminacijom vremena iz gornjih jednadžbi dobivamo jednadžbu putanje

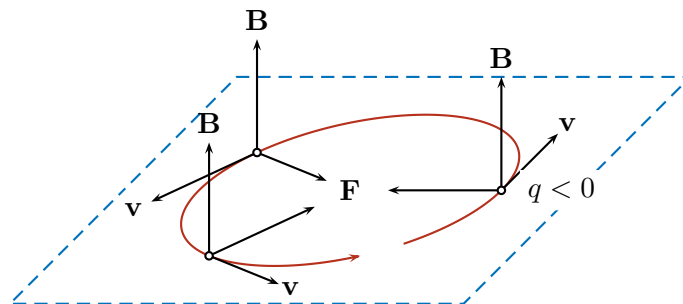
$$y[x] = \frac{eU}{2m_e d v_0^2} x^2.$$

Derivacija funkcije  $y[x]$  po  $x$  izvrijednjena u  $x = \ell$  (točka u kojoj elektron izlazi iz otklonskog sustava) daje nam tangens kuta  $\theta$  koji otklonjena putanja zatvara s osi  $x$ ,

$$\operatorname{tg} \theta = \left. \frac{d}{dx} y[x] \right|_{x=\ell} = \frac{eU\ell}{m_e d v_0^2}.$$

Uočavamo da je tangens kuta otklona razmjernan naponu  $U$ , a pri malim kutovima kad vrijedi  $\operatorname{tg} \theta \simeq \theta$ , možemo smatrati da je sam kut otklona razmjernan naponu.

**Gibanje u homogenom magnetskom polju:** Ako je brzina nabijene čestice u početnom trenutku okomita na homogeno magnetsko polje te ako je brzina nabijene čestice znatno manja od brzine svjetlosti, čestica se giba duž kružnice koja leži u ravnini okomitoj na magnetsko polje. Iznos brzine čestice tijekom gibanja ostaje nepromijenjen jer je magnetska sila okomita na brzinu čestice te djelujući na nju ne obavlja rad. Slika prikazuje negativno nabijenu česticu koja se giba na takav način.



Magnetska sila  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , gdje je  $q$  naboj čestice,  $\mathbf{v}$  je brzina čestice, a  $\mathbf{B}$  je homogeno magnetsko polje, ima ulogu centripetalne sile stalnog iznosa  $F_{\text{cp}} = |q|vB$  koja osigurava kružno gibanje. Korištenjem izraza za iznos centripetalne sile  $F_{\text{cp}} = mv^2/R$ , gdje je  $R$  je polumjer kružne putanje,

te izraza za kutnu brzinu  $\omega = v/R$ , nalazimo

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \text{i} \quad \omega = \frac{|q|B}{m}. \quad (1.10)$$

Ako brzina čestice osim komponente koja je okomita na homogeno magnetsko polje ima i komponentu koja je paralelna s poljem, ta komponenta brzine ostaje u vremenu nepromijenjena. Čestica u tom slučaju izvodi spiralno gibanje oko osi paralelne s magnetskim poljem, pri čemu izrazi (1.10) i dalje vrijede.

**Primjer 1.2.4:** *Otklonski sustav s magnetskim poljem*

Otklanjanje snopa elektrona s njegovog izvornog smjera može se ostvariti propuštanjem snopa kroz prostor u kojem je prisutno homogeno magnetsko polje okomito na smjer gibanja elektrona.

**Sila koja djeluje na struju u magnetskom polju:** Ako se element žice  $d\ell$  kojim teče struja  $I$  nalazi u točki prostora u kojoj magnetsko polje ima vrijednost  $\mathbf{B}$ , na njega djeluje element sile

$$d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B}. \quad (1.11)$$

Ukupnu silu koja djeluje na žicu dobivamo integracijom elemenata sile  $d\mathbf{F}$  po čitavoj duljini žice. Gornji izraz možemo izvesti krenemo li od elementa sile  $d\mathbf{F} = dq \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  koja djeluje na element naboja  $dq$ , a koji se duž žice giba brzinom  $\mathbf{v}$  u magnetskom polju  $\mathbf{B}$ . Ako žicom teče struja  $I$ , element naboja  $dq$  koji u elementu vremena  $dt$  protekne žicom je možemo izraziti s  $dq = I dt$ , a pomak koji on pritom napravi  $d\ell = \mathbf{v} dt$ . Uvrštavanjem  $dq = I dt$  i  $\mathbf{v} = d\ell/dt$  u izraz za element sile  $d\mathbf{F}$  dobivamo izraz (1.11).

**Primjer 1.2.5:**

Sila na komad ravne žice duljine  $\ell = 10 \text{ cm}$  kojim teče struja  $I = 1 \text{ A}$  u magnetskom polju iznosa  $B = 50 \mu\text{T}$  (mogući iznos Zemljinog magnetskog pri njenoj površini), postavimo li žicu okomito na polje, iznosila bi  $F = 5 \mu\text{N}$ .

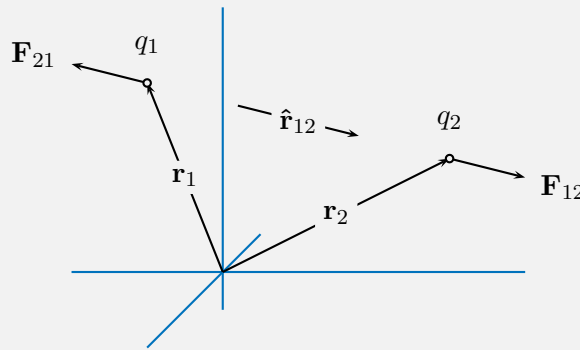
**Elektromagnetsko polje** (engl. *electromagnetic field*): U situacijama u kojima električni naboji miruju ili se gibaju na takav način da su električne struje stalne u vremenu, električno i magnetsko polje ne ovise o vremenu i moguće ih je proučavati kao međusobno nepovezane pojave. Međutim, kad te pretpostavke nisu ispunjene, polja postaju ovisna o vremenu pri čemu njihove promjene ne ovise samo o gibanju naboja i promjeni struja, već su uzajamno povezane. Zbog povezanosti vremenskih promjena električnog i magnetskog polja ta polja općenito ne smatramo odvojenim pojavama, već na njih gledamo kao na kao na dvije "komponente" jedne prirodne pojave koju zovemo elektromagnetskim poljem.

**Maxwellove jednadžbe** (engl. *Maxwell's equations*): Cjelokupna teorija elektromagnetizma proizlazi iz izraza za Lorentzovu ili elektromagnetsku silu (1.6) te iz tzv. Maxwellovih jednadžbi. Maxwellove jednadžbe su sustav vezanih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi u kojima se pojavljuju prostorne i vremenske derivacije električnog i magnetskog polja te gustoća električnog naboja  $\rho$  i gustoća električne struje  $\mathbf{J}$  koje smatramo izvorima polja.. Maxwellovim jednadžbama bavi se poglavlje 3 prije kojega je uputno proučiti poglavlje 2 koje se bavi potrebnim matematičkim formalizmom.

### 1.3 Coulombov zakon i elektrostatika

**Elektrostatika** je područje elektromagnetizma koje se bavi opisom električnog polja i raspodjele naboja u prostoru u situacijama u kojima je električno polje stalno u vremenu i svi naboji miruju. Ovdje se bavimo isključivo jednostavnim situacijama iz elektrostatike koje je moguće opisati primjenom Coulombovog zakona.

**Coulombov zakon:** Svake dvije mirne električki nabijene čestice međudjeluju tzv. *Coulombovom silom* čiji je iznos razmjeran nabojima čestica i inverznom kvadratu udaljenosti među njima (kažemo da iznos sile opada s kvadratom udaljenosti). Coulombova sila odbojna je kad naboji čestica imaju isti predznak, a privlačna je kad naboji čestica imaju suprotan predznak. Slika prikazuje slučaj u kojem su naboji čestica  $q_1$  i  $q_2$  istog predznaka.



Neovisno o tome jesu li naboji čestica istog ili suprotnog predznaka Coulombovu silu  $\mathbf{F}_{12}$  kojom čestica 1 djeluje na česticu 2 i silu  $\mathbf{F}_{21}$  kojom čestica 2 djeluje na česticu 1 možemo izraziti s

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}, \quad (1.12)$$

gdje je  $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$  udaljenost među česticama,  $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$  je jedinični vektor usmjeren od čestice 1 prema čestici 2, a

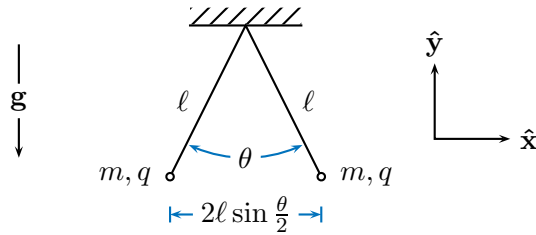
$$\epsilon_0 \simeq 8.854188 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \quad (1.13)$$

je tzv. *električna konstanta*. Nazivi za konstantu  $\epsilon_0$  koji se također koriste su *permitivnost vakuuma* i *permitivnost slobodnog prostora*, a mjerna jedinica istovjetna gore navedenoj je  $\text{F m}^{-1}$  (farad po metru).

### Primjer 1.3.1: Elektroskop

Elektroskop je uređaj kojim pokazujemo prisutnost električnog naboja. U najjednostavnijoj izvedbi koju sami možete konstruirati, dva listića izrezana iz aluminijske folije vise jedan pored drugog i električki su povezana. Dovedemo li na listiće neku količinu električnog naboja, naboj će se rasporediti na listićima te će se listići zbog djelovanja Coulombove sile međusobno odbijati, razmaknut će se, i time pokazati prisutnost naboja.

Ovdje ćemo razmotriti "elektroskop" koji se sastoji od dviju sitnih kuglica mase  $m$  koje jedna pored druge vise na nevodljivim nitima duljine  $\ell$ . Odredit ćemo količinu električnog naboja  $q$  koja mora biti prisutna na svakoj kuglici želimo li da se niti razmaknu za kut  $\theta$ , odnosno da razmak među česticama bude  $2\ell \sin \frac{\theta}{2}$ .



Među česticama djeluje odbojna Coulombova sila. Njen smjer je vodoravan, a iznos joj je

$$F_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l \sin \frac{\theta}{2})^2}.$$

Na čestice također djeluje sila teža čiji je iznos  $mg$ . Konačno, Coulombova sila i sila teža koje djeluju na promatranu česticu uravnotežene su silom napetosti niti na kojoj ta čestica visi, a čiji iznos označavamo s  $T$ . Raspisivanjem uvjeta ravnoteže u pravokutnom koordinatnom sustavu (nit s uspravnim pravcem zatvara kut  $\theta/2$ ) imamo

$$T \sin \frac{\theta}{2} = F_{\text{Coulomb}}, \quad T \cos \frac{\theta}{2} = mg,$$

a dijeljenjem prve jednadžbe s drugom i korištenjem izraza za  $F_{\text{Coulomb}}$  nalazimo

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{F_{\text{Coulomb}}}{mg} = \frac{1}{mg} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2l \sin \frac{\theta}{2})^2},$$

Traženu količinu naboja možemo izraziti s

$$q^2 = 16\pi\epsilon_0 mg \ell^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \text{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Za mali kut  $\theta$  za koji vrijedi  $\sin \frac{\theta}{2} \simeq \frac{\theta}{2} \simeq \text{tg} \frac{\theta}{2}$  nalazimo

$$q^2 = 2\pi\epsilon_0 mg \ell^2 \theta^3,$$

gdje uočavamo da otklon  $\theta$  u odnosu na naboj  $q$  raste s potencijom  $2/3$ , što znači da je elektro-skop, barem u načelu, vrlo osjetljiv upravo na male količine naboja.

**Djelovanje na daljinu** (engl. *action-at-distance*): Međudjelovanje nabijenih čestica Coulombovom silom pri udaljenostima koje su toliko velike da isključuju mogućnost mehaničkog kontakta među česticama navela je fizičare da za potrebe opisa takvog “djelovanja na daljinu” uvedu koncept električnog polja.

**Električno polje statične nabijene čestice (Coulombovo polje):** Izraz (1.12) za Coulombovu silu kojom čestica 1 (naboj  $q_1$ , položaj  $\mathbf{r}_1$ ) djeluje na česticu 2 (naboj  $q_2$ , položaj  $\mathbf{r}_2$ ) možemo također napisati u obliku

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad (1.14)$$

gdje je treća potencija udaljenosti  $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$  u nazivniku prisutna jer je jedinični vektor  $\hat{\mathbf{r}}_{12}$  iz (1.12) napisan kao  $\hat{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{r}_{12}/r_{12} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Izlučimo li naboj  $q_2$  iz izraza na desnoj strani,

silu  $\mathbf{F}_{12}$  možemo napisati u obliku električnog dijela Lorentzove sile (1.6),

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E}_1[\mathbf{r}_2], \quad (1.15)$$

gdje vektorsku funkciju

$$\mathbf{E}_1[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad (1.16)$$

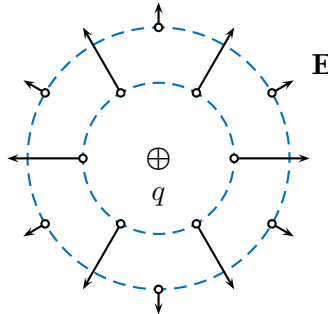
prepoznamo kao *električno polje* koje čestica naboja  $q_1$  koja se nalazi u točki  $\mathbf{r}_1$  stvara u točki  $\mathbf{r}$ . To polje moguće je izračunati u bilo kojoj točki prostora osim u samoj točki  $\mathbf{r}_1$  u kojoj o tom polju nema smisla govoriti. Zbog toga uzimamo da električno polje  $\mathbf{E}_1$  čestice 1 koja se nalazi u točki  $\mathbf{r}_1$  postoji u *svim ostalim* točkama prostora neovisno o tome nalazi se u tim točkama neki naboj ili ne, a dovedemo li naboj  $q$  u točku  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_1$ , na njega će zbog prisutnosti polja  $\mathbf{E}_1$  djelovati sila  $\mathbf{F} = q \mathbf{E}_1[\mathbf{r}]$ . Zbog činjenice da izraz za električno polje čestice (1.16) proizlazi iz Coulombovog zakona (1.12), to polje se još naziva Coulombovom poljem.

**Primjer 1.3.2:** *Grafički prikaz električnog polja nabijene čestice (Coulombovog polja)*

Smjestimo li česticu naboja  $q$  u ishodište, električno polje te čestice u točki  $\mathbf{r}$  je

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.17)$$

gdje jedinični vektor  $\hat{\mathbf{r}}$  gleda od ishodišta prema točki  $\mathbf{r}$ , odnosno od naboja prema točki u kojoj računamo električno polje. Prepoznamo da iznos polja opada s kvadratom udaljenosti od čestice te da je polje pozitivno nabijene čestice usmjereno “od čestice prema van”, dok je polje negativno nabijene čestice usmjereno “prema čestici”. Slika prikazuje električno (Coulombovo) polje pozitivno nabijene čestice u nekolicini točaka ravnine u kojoj se čestica nalazi.



Polumjer unutarnje i vanjske iscrtkane kružnice na gornjoj slici odnose se kao  $1 : \sqrt{3}$ , a s obzirom da iznos električnog polja čestice opada s kvadratom udaljenosti, to znači da je polje u točkama na vanjskoj kružnici tri puta slabije od polja na unutarnjoj kružnici.

**Električno polje statične raspodjele naboja (elektrostatsko polje):** U sustavu koji se sastoji od  $N$  statičnih čestica čiji su električni naboji  $q_i$  i čiji su položaji  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , električno polje u točki  $\mathbf{r}$  je

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.18)$$

Gornji izraz shvaćamo kao zbroj, ili kako se to još kaže kao *superpoziciju*, Coulombovih polja sviji  $N$  naboja.

Ako je raspodjela električnog naboja u prostoru opisana volumnom, površinskom ili linijskom gustoćom naboja, naboj  $q_i$  u gornjem izrazu zamijenjujemo elementom naboja  $dq'$  koji se nalazi u okolini točke  $\mathbf{r}'$ , a sumu zamijenjujemo integralom. Električno polje u točki  $\mathbf{r}$  tada je

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq', \quad (1.19)$$

gdje element naboja  $dq'$  izražavamo kao

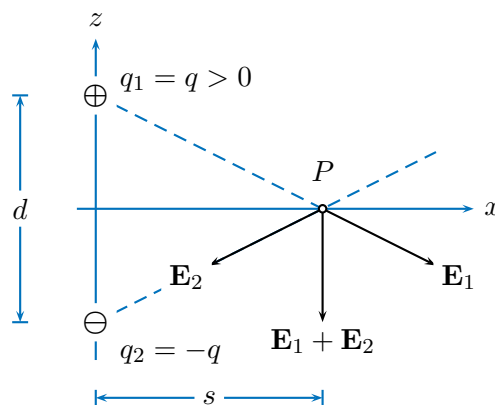
$$dq' = \rho[\mathbf{r}'] dV', \quad dq' = \sigma[\mathbf{r}'] dS', \quad \text{ili} \quad dq' = \lambda[\mathbf{r}'] dl', \quad (1.20)$$

ovisno o tome je li raspodjela naboja opisana volumnom gustoćom naboja  $\rho$  ( $dV$  je element volumena), površinskom gustoćom naboja  $\sigma$  ( $dS$  je element plohe) ili linijskom gustoćom naboja  $\lambda$  ( $dl$  je element krivulje).

### Primjer 1.3.3: Polje električnog dipola

Konfiguraciju koja se sastoji od točkastih naboja  $q$  i  $-q$  na međusobnom razmaku  $d$  zovemo *električnim dipolom*. Pravac na kojem leže naboji zovemo *osi dipola*, a ravninu koja je okomita na tu os, a naboji su jednako udaljeni od nje, zovemo *ravninom dipola*. Električno polje dipola prikazano je dvjema slikama u primjeru 1.2.1, a ovdje ćemo korištenjem izraza (1.18) izvesti općenit izraz koji opisuje to polje kao i pojednostavljene izraze koji vrijede isključivo u točkama na osi dipola i u točkama ravnine dipola.

Slika prikazuje električni dipol kojeg čine naboji  $q_{1,2} = \pm q$  na međusobnom razmaku  $d$ .



Koordinatni sustav razapet je tako da se os dipola podudara s osi  $z$ , a ravnina dipola s ravninom  $z = 0$ . Vektori položaja čestica su  $\mathbf{r}_{1,2} = \pm(d/2)\hat{\mathbf{z}}$ . Slika također prikazuje električno polje dipola u točki  $P$  ravnine dipola čiji je položaj dan vektorom  $\mathbf{r} = s\hat{\mathbf{x}}$ .

- Općenit izraz za polje dipola nalazimo uvrštavanjem  $q_{1,2} = \pm q$  i  $\mathbf{r}_{1,2} = \pm(d/2)\hat{\mathbf{z}}$  u izraz (1.18),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{r}] &= \mathbf{E}_1[\mathbf{r}] + \mathbf{E}_2[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \frac{q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{r} - (d/2)\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - (d/2)\hat{\mathbf{z}}|^3} - \frac{\mathbf{r} + (d/2)\hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} + (d/2)\hat{\mathbf{z}}|^3} \right). \end{aligned}$$

- Polje u točki  $P$  ravnine dipola dobivamo uvrštavanjem  $\mathbf{r} = s \hat{\mathbf{x}}$  u gornji izraz čime dobivamo

$$\mathbf{E}_{z=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{s \hat{\mathbf{x}} - (d/2) \hat{\mathbf{z}}}{|s \hat{\mathbf{x}} - (d/2) \hat{\mathbf{z}}|^3} - \frac{s \hat{\mathbf{x}} + (d/2) \hat{\mathbf{z}}}{|s \hat{\mathbf{x}} + (d/2) \hat{\mathbf{z}}|^3} \right) = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 (s^2 + (d/2)^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

(koristili smo  $|s \hat{\mathbf{x}} \pm (d/2) \hat{\mathbf{z}}| = (s^2 + (d/2)^2)^{1/2}$ ). Bez obzira što je račun provoden za točku  $P$  na osi  $x$ , zbog simetrije problema očekujemo da dobiveni izraz vrijedi za bilo koju točku ravnine dipola čija je udaljenost od osi  $s$ . Uočavamo da u točkama ravnine dipola električno polje ima isključivo komponentu paralelnu s osi dipola, a što je vidljivo i na slikama u primjeru (1.2.1). Također uočavamo da u točkama ravnine dipola čija je udaljenost  $s$  od dipola znatno veća od razmaka  $d$ , član  $(d/2)^2$  u nazivniku konačnog izraza postaje zanemariv u usporedbi s članom  $s^2$ , a zanemarimo li taj član vidimo da iznos polja opada s trećom potencijom udaljenosti od dipola.

- Električno polje na osi dipola računamo uvrštavanjem  $\mathbf{r} = z \hat{\mathbf{z}}$  u općenit izraz što nam daje

$$\mathbf{E}_{s=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{z \hat{\mathbf{z}} - (d/2) \hat{\mathbf{z}}}{|z \hat{\mathbf{z}} - (d/2) \hat{\mathbf{z}}|^3} - \frac{z \hat{\mathbf{z}} + (d/2) \hat{\mathbf{z}}}{|z \hat{\mathbf{z}} + (d/2) \hat{\mathbf{z}}|^3} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{z - d/2}{|z - d/2|^3} - \frac{z + d/2}{|z + d/2|^3} \right) \hat{\mathbf{z}},$$

a ograničimo li razmatranje na točke u području  $z > d/2$  izraz možemo napisati u obliku

$$\mathbf{E}_{s=0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(z - d/2)^2} - \frac{1}{(z + d/2)^2} \right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 - (d/2)^2)^2} \hat{\mathbf{z}}$$

(koristili smo  $a/|a|^3 = 1/a^2$  što vrijedi za  $a = z \pm d/2 > 0$ ). Za  $z < d/2$  dobili bismo polje suprotnog smjera, a područje  $-d/2 < z < d/2$  nam ovdje nije od značaja i nećemo ga računati. Uočavamo da je električno polje u točkama na osi dipola paralelno s osi te da pri daljenostima od dipola koje su znatno veće od razmaka među nabojima iznos polja opada s trećom potencijom udaljenosti.

### Primjer 1.3.4: Električno polje jednoliko nabijenog pravca

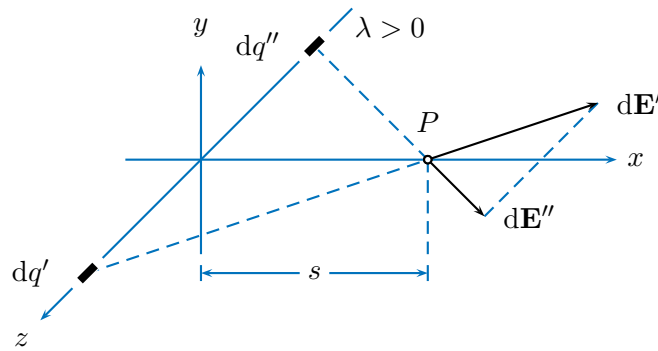
Električno polje pravca linijske gustoće naboja  $\lambda$  u točki  $P$  koja se nalazi na udaljenosti  $s$  od pravca možemo opisati izrazom

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s} \hat{\mathbf{s}}, \quad (1.21)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{s}}$  je jedinični vektor koji od njoj najbliže točke na pravcu gleda prema točki  $P$ . Iznos polja razmjernan je *inverznoj udaljenosti* točke od pravca, što znači da polje s udaljenošću "opada sporije" nego što je to slučaj s iznosom polja nabijene čestice koje je razmjerno inverznom kvadratu udaljenosti. Ako je pravac pozitivno nabijen ( $\lambda > 0$ ) polje je usmjereno "od pravca prema van", a ako je pravac nabijen negativno ( $\lambda < 0$ ) polje je usmjereno "prema pravcu". Izraz (1.21) izvest ćemo korištenjem izraza (1.19).

Slika prikazuje elemente naboja  $dq'$  i  $dq''$  pravca nabijenog linijskom gustoćom  $\lambda > 0$  te njihove doprinose  $d\mathbf{E}'$  i  $d\mathbf{E}''$  električnom polju u točki  $P$  koja se nalazi na udaljenosti  $s$  od pravca.





Koordinatni sustav razapet je tako da nabijeni pravac leži na osi  $z$ , a točka  $P$  se nalazi na osi  $x$  (točka nabijenog pravca najbliža točki  $P$  ishodište je koordinatnog sustava). Elementi polja  $d\mathbf{E}'$  i  $d\mathbf{E}''$  u točki  $P$  leže u ravnini određenoj nabijenim pravcem i točkom  $P$ , što je ovdje ravnina  $y = 0$ , te imaju  $x$ -komponentu koja je okomita na nabijeni pravac i  $z$ -komponentu koja je paralelna s nabijenim pravcem. Međutim, ako su  $dq'$  i  $dq''$  jednakog iznosa i jednako su udaljeni od ishodišta (vidi gornju sliku), onda  $d\mathbf{E}'$  i  $d\mathbf{E}''$  imaju suprotne  $z$ -komponente te je  $z$ -komponenta njihovog zbroja jednaka nuli. Nadalje, s obzirom da ukupno polje  $\mathbf{E}$  u točki  $P$  možemo shvatiti kao integral elemenata polja simetričnih parova elemenata naboja, slijedi da ukupno polje također ima  $z$ -komponentu jednaku nuli, odnosno da je dovoljno integrirati njegovu  $x$ -komponentu,

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}}, \quad \text{gdje je} \quad E_x = \int dE'_x.$$

Element naboja pravca možemo izraziti kao  $dq' = \lambda dz'$ , gdje je  $dz'$  element pravca, a udaljenost  $dq'$  od  $P$  je  $\sqrt{z'^2 + s^2}$ , gdje je  $z'$  koordinata položaja  $dq'$  na osi  $z$ . Podrazumijevajući  $\lambda > 0$ , iznos elementa polja koje  $dq'$  stvara u  $P$  možemo izraziti s

$$|d\mathbf{E}'| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{z'^2 + s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz'}{z'^2 + s^2},$$

a  $x$ -komponentu tog elementa dobivamo množeći ga kosinusom kuta  $\theta'$  koji  $d\mathbf{E}'$  zatvara s  $x$ -osi (prepoznamo  $\cos \theta' = s/\sqrt{z'^2 + s^2}$ ),

$$dE'_x = d\mathbf{E}' \cdot \hat{\mathbf{x}} = |d\mathbf{E}'| \cos \theta' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dz'}{z'^2 + s^2} \frac{s}{\sqrt{z'^2 + s^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{s \lambda dz'}{(z'^2 + s^2)^{3/2}}.$$

Integracijom  $dE'_x$  dobivamo  $x$ -komponentu ukupnog polja,

$$E_x = \int dE'_x = \frac{s\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(z'^2 + s^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s}$$

(koristili smo poznati određeni integral  $\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-3/2} dx = a^{-2}$ ). Napišemo li gornji izraz u vektorskom obliku,

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s} \hat{\mathbf{x}},$$

prepoznamo da jedinični vektor  $\hat{\mathbf{x}}$  ima ulogu jediničnog vektora  $\hat{\mathbf{s}}$  u (1.21) koji od najbliže točke nabijenog pravca gleda prema točki  $P$ , a također uočavamo da gornji izraz osim za  $\lambda > 0$  vrijedi i za  $\lambda < 0$  kada elementi polja gledaju prema elementima naboja, a ne od njih. Time smo izveli izraz (1.21).

*Napomena:* Beskonačan jednoliko nabijeni pravac u prirodi ne postoji, ali izraz (1.21) za električno polje može predstavljati prihvatljivu aproksimaciju pri opisu električnog polja u blizini dijela ravne električki nabijene žice.

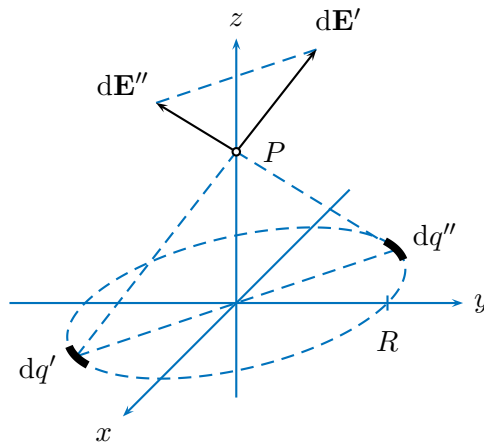
**Primjer 1.3.5:** Električno polje na osi jednoliko nabijenog tankog prstena

Električno polje u točkama na osi tankog prstena polumjera  $R$  duž kojeg je jednoliko raspoređen električni naboj  $q$ , smjestimo li prsten u ravninu  $z = 0$  sa središtem prstena u ishodištu, može se izraziti s

$$\mathbf{E}[z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.22)$$

Uočavamo da je električno polje u središtu prstena jednako nuli, kao i to da se izraz (1.22) za  $z \gg R$ , odnosno za  $R \rightarrow 0$ , svodi na  $E_z = q/4\pi\epsilon_0 z^2$ , što odgovara polju koje bi u istoj točki stvarala čestica naboja  $q$  koja se nalazi u ishodištu.

Slika prikazuje element prstena čiji je naboj  $dq' > 0$  te isti takav element naboja  $dq''$  koji se nalazi sa suprotne strane prstena. Slika također prikazuje elemente električnog polja  $d\mathbf{E}'$  i  $d\mathbf{E}''$  koje elementi naboja  $dq'$  i  $dq''$  stvaraju u točki  $P$  na osi prstena. Koordinatni sustav razapet je tako da prsten leži u ravnini  $z = 0$  sa središtem u ishodištu ( $z$ -os se podudara s osi prstena).



Električno polje čitavog prstena jest integral elemenata polja koje stvaraju svi elementi naboja prstena,

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}'.$$

Uočavamo da svaki element polja  $d\mathbf{E}'$  ima komponentu duž osi prstena kao i komponentu koja je okomita na tu os, Međutim, s obzirom da se svakom elementu prstena sa suprotne strane prstena nalazi isti takav element prstena koji stvara element polja  $d\mathbf{E}''$  s okomitom komponentom suprotnog smjera, u integralu će se svi doprinosi polju okomiti os dokinuti. To znači da je dovoljno integrirati  $z$ -komponentu elemenata polja.

Ako je  $z$  koordinata položaja točke  $P$  na  $z$ -osi onda udaljenost točke  $P$  od elementa naboja  $dq'$  možemo izraziti s  $\sqrt{R^2 + z^2}$ , a iznos elementa polja  $d\mathbf{E}'$  kojeg  $dq'$  stvara u  $P$  je

$$|d\mathbf{E}'| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq'}{R^2 + z^2}.$$

Iz slike se može zaključiti da kosinus kuta  $\theta$  koji element polja  $d\mathbf{E}$  zatvara sa  $z$ -osi

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Sada  $z$ -komponentu elementa polja možemo izraziti kao

$$dE'_z = d\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{z}} = |d\mathbf{E}'| \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

a integracijom po naboju prstena dobivamo  $z$ -komponentu polja,

$$E_z = \int dE'_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dq' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zq}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

što je u skladu s vektorskim izrazom (1.22).

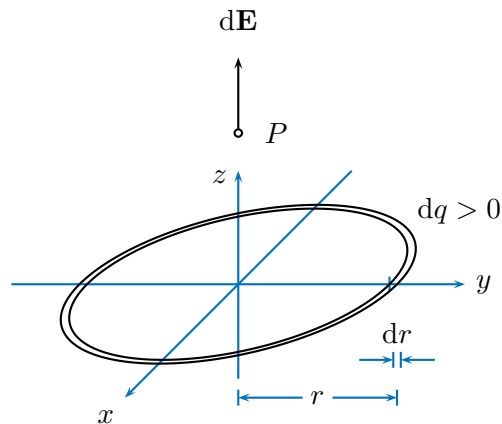
### Primjer 1.3.6: Električno polje jednoliko nabijene ravnine

Električno polje jednoliko nabijene ravnine čija je površinska gustoća naboja  $\sigma$  okomito je na ravninu, pri čemu jakost polja

$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} |\sigma| \quad (1.23)$$

ne ovisi o udaljenosti od ravnine. Ako je ravnina pozitivno nabijena ( $\sigma > 0$ ) polje je usmjereno "od ravnine prema van", a ako je negativno nabijena ( $\sigma < 0$ ) polje je usmjereno "prema ravnini". To znači da je električno polje s obje strane jednoliko nabijene ravnine homogeno, ali polje s jedne i polje s druge strane ravnine imaju suprotan smjer.

Izraz (1.23) možemo izvesti korištenjem izraza (1.22) za polje tankog nabijenog prstena u točki na njegovoj osi. Uzet ćemo da je ravnina  $z = 0$  jednoliko električki nabijena nabojem površinske gustoće  $\sigma$ , a zatim ćemo ju "rastaviti" na niz koncentričnih kružnih staza polumjera  $r$  i širine  $dr$  sa središtima u ishodištu. Slika prikazuje jednu od takvih kružnih staza i element električnog polja  $d\mathbf{E}$  koje naboje  $dq$  na toj stazi stvara u točki  $P$  na  $z$ -osi.



Opseg prikazane staze je  $2\pi r$ , a kako je njena širina  $dr$ , njena površina je  $dS = 2\pi r dr$ . To znači da je element naboja na stazi

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr,$$

a shvatimo li tu stazu kao tanak prsten, element električnog polja u točki  $P$  na  $z$ -osi je prema izrazu (1.22)

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{zr dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}.$$

Polje u točki  $P$  dobivamo integracijom elemenata polja koje stvaraju sve kružne staze od kojih se ravnina sastoji. Integracija se provodi po polumjeru staze od  $r = 0$  do  $r = \infty$ ,

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \text{sign}[z] \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}},$$

gdje prepoznamo izraz (1.23) (integral u posljednjem koraku,  $\int_0^\infty x(a^2 + x^2)^{-3/2} dx = |a|^{-1}$ , jedan je od poznatih određenih integrala).

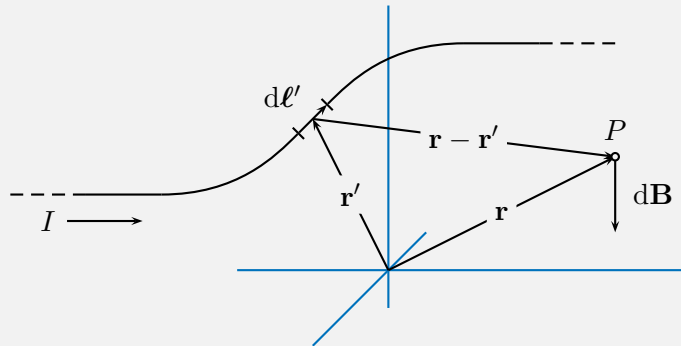
*Napomena:* Beskonačna jednoliko nabijena ravnina u prirodi ne postoji, ali gornji izraz za električno polje predstavlja dobru aproksimaciju električnog polja u blizini ravne jednoliko nabijene ploče konačnih dimenzija. Takvu situaciju nalazimo npr. u prostoru među pločama nabijenog električnog kondenzatora.

## 1.4 Biot–Savartovo pravilo i magnetostatika

**Magnetostatika** je područje elektromagnetizma koje se bavi situacijama u kojima se naboji gibaju uz ograničenje da je gustoća električne struje svuda u prostoru stalna u vremenu. Takve struje stvaraju magnetsko polje koje je stalno u vremenu. Ovdje razmatramo samo nekoliko najjednostavnijih situacija iz magnetostatike koje možemo opisati primjenom tzv. Biot–Savartovog pravila.

**Biot–Savartovo pravilo** omogućuje računanje magnetskog polja u situacijama i kojima je poznata raspodjela električne struje u prostoru.

Krivulja na slici predstavlja tanki vodič (žicu) kojom u naznačenom smjeru teče stalna električna struja  $I$ . Element krivulje prikazujemo vektorom  $d\ell'$  koji je orijentiran u smjeru u kojem teče struja, a njegov iznos  $d\ell' = |d\ell'|$  jest element duljine krivulje. Vektor  $\mathbf{r}'$  opisuje položaj elementa vodiča  $d\ell'$ , a vektor  $\mathbf{r}$  opisuje položaj točke  $P$  u prostoru. Vektor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  opisuje položaj točke  $P$  u odnosu na element  $d\ell'$ .



Prema Biot–Savartovu pravilu, struja  $I$  koja teče elementom krivulje  $d\ell'$  stvara u točki  $P$  element magnetskog polja

$$d\mathbf{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.24)$$

gdje je

$$\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7} \text{ T m A}^{-1} \quad (1.25)$$

tzv. *magnetska konstanta* ili *permeabilnost vakuuma*. Mjerna jedinica istovjetna gore navedenoj je  $\text{H m}^{-1}$  (henri po metru). Ukupno magnetsko polje u točki  $P$  dobiva se integracijom elemenata magnetskog polja (1.24),

$$\mathbf{B}[\mathbf{r}] = \int d\mathbf{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.26)$$

pri čemu se integracija provodi duž čitave krivulje.

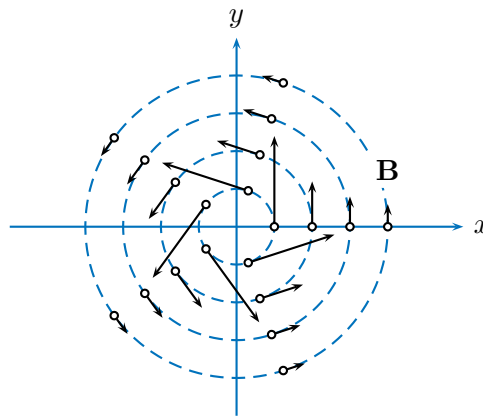
Biot–Savartovo pravilo, poput Coulombovog zakona, slijedi iz Maxwellovih jednadžbi kojima se bavi poglavlje 3, iako za sada sam izvod nije prikazan (nije gradivo predmeta Fizika).

**Primjer 1.4.1:** *Magnetsko polje beskonačnog ravnog tankog vodiča*

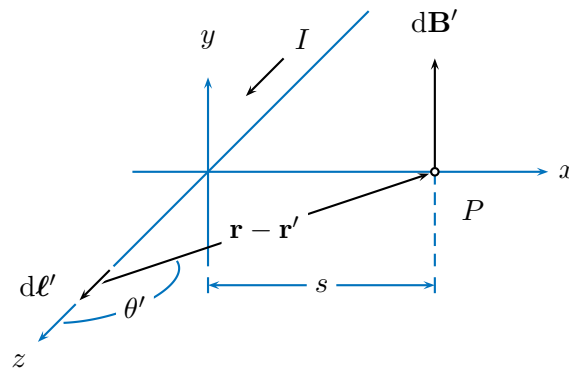
Ako beskonačnom ravnim tankim vodičem, u daljnjem tekstu žicom, teče stalna struja  $I$ , onda magnetsko polje na udaljenosti  $s$  od žice ima iznos

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad (1.27)$$

koji je razmjernan inverznoj udaljenosti  $s$ . Smjer magnetskog polja podudara se s tangentom na kružnicu koja leži u ravnini okomitoj na žicu sa središtem u samoj žici. Pritom orijentacija polja duž kružnice odgovara smjeru vrtnje desnog vijka kad on napreduje u smjeru toka struje. Slika prikazuje magnetsko polje u nekim točkama ravnine  $z = 0$  ako struja teče u pozitivnom smjeru  $z$ -osi.



Kako bismo korištenjem Biot–Savartovog pravila izveli izraz (1.27) promatramo element žice  $d\ell'$  kojom teče struja  $I$  i odgovarajući element magnetskog polja  $d\mathbf{B}'$  u točki  $P$  koja se nalazi na udaljenosti  $s$  od žice.



Na gornjoj slici je također prikazan vektor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  koji opisuje položaj točke  $P$  u odnosu na  $d\ell'$ . Koordinatni sustav je razapet tako da žica leži na  $z$ -osi, a točka  $P$  se nalazi na  $x$ -osi.

Kako bismo izveli izraz (1.27) polazimo od elementa polja danog izrazom (1.24) koji ovdje pišemo u obliku

$$d\mathbf{B}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\ell'| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sin \theta' \hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell' \sin \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{y}},$$

pri čemu smo koristili svojstvo vektorskog produkta, a s  $\theta'$  smo označili kut koji element žice  $d\ell'$  zatvara s vektorom  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Uočavamo da neovisno o položaju elementa  $d\ell'$  na  $z$ -osi, element polja ima samo  $y$ -komponentu. Nadalje, označimo li sa  $z'$  koordinatu položaja elementa  $d\ell'$  na  $z$ -osi, iz slike zaključujemo da je udaljenost točke  $P$  od elementa  $d\ell'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{s^2 + z'^2}$$

te da sinus kuta  $\theta'$  možemo izraziti s

$$\sin \theta' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + z'^2}}.$$

Konačno, izrazimo li element duljine žice kao  $d\ell' = dz'$ ,  $y$ -komponenta elementa polja u  $P$  je

$$dB'_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Is dz'}{(s^2 + z'^2)^{3/2}},$$

a  $y$ -komponentu ukupnog polja u  $P$  dobivamo integracijom  $dB'_y$  po čitavoj  $z$ -osi,

$$B_y = \int dB'_y = \frac{\mu_0 Is}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(s^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

(koristili smo poznati integral  $\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-3/2} dx = a^{-2}$  koji smo već susreli u primjeru 1.3.4).

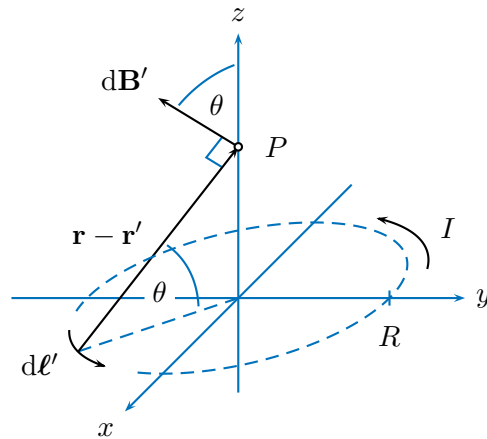
### Primjer 1.4.2: Magnetsko polje na osi kružne petlje

Ako tankom kružnom petljom polumjera  $R$  teče stalna električna struja  $I$  onda je iznos magnetskog polja u točki koja se nalazi na osi petlje na udaljenosti  $z$  od njenog središta

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (1.28)$$

Magnetsko polje u točkama na osi petlje paralelno je s osi, a njegovu orijentaciju možemo opisati smjerom u kojem bi napredovao desni vijak kad bismo ga usmjerili duž osi i vrtjeli u smjeru u kojem petljom teče struja. Izraz (1.28) nam govori da je polje najjače u središtu prstena ( $z = 0$ ) te da pri udaljenostima koje su znatno veće od njegovog polumjera ono opada s trećom potencijom udaljenosti.

Slika prikazuje element  $d\ell'$  kružne petlje koja leži u ravnini  $z = 0$  sa središtem u ishodištu i kojem u pozitivnom smjeru teče stalna struja  $I$ . Slika također prikazuje odgovarajući element magnetskog polja  $dB'$  u točki  $P$  na  $z$ -osi, vektor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  koji opisuje položaj točke  $P$  u odnosu na element  $d\ell'$  te kut  $\theta$  koji taj vektor zatvara s ravninom  $z = 0$ .



Iz slike se može zaključiti da se pri integraciji elemenata  $d\mathbf{B}'$  komponente okomite na  $z$ -os dokidaju, a to znači da ukupno polje ima isključivo  $z$ -komponentu, odnosno da je dovoljno integrirati  $z$ -komponentu elemenata  $d\mathbf{B}'$ . Iznos elementa magnetskog polja  $d\mathbf{B}'$  prikazanog na slici možemo izraziti korištenjem izraza (1.24) kao

$$|d\mathbf{B}'| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|I d\ell' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I |d\ell'| |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

(koristili smo okomitost vektora  $d\ell'$  i  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ), a  $z$ -komponentu elementa polja  $d\mathbf{B}'$  dobivamo množenjem gornjeg iznosa kosinusom kuta koji  $d\mathbf{B}'$  zatvara sa osi  $z$ . Iz slike se može zaključiti da je taj kut jednak kutu  $\theta$  koji vektor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  zatvara s ravninom  $z = 0$  te da vrijedi

$$\cos \theta = \frac{R}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \text{i} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2},$$

gdje je  $z$  koordinata položaja točke  $P$  na  $z$ -osi. Slijedi da  $z$ -komponentu magnetskog polja možemo izraziti s

$$dB'_z = |d\mathbf{B}'| \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{R}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + z^2)^{3/2}} d\ell',$$

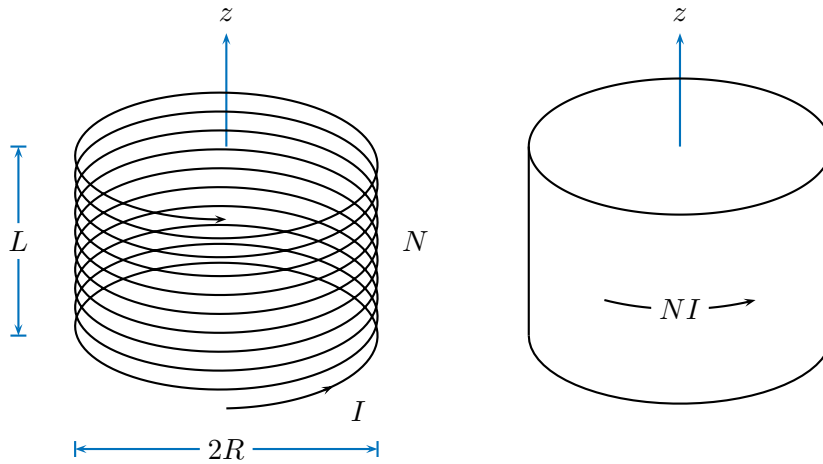
a integracijom po čitavoj duljini petlje,  $\int d\ell' = 2\pi R$ , dobivamo  $z$ -komponentu ukupnog magnetskog polja

$$B'_z = \int dB'_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

čime smo izveli izraz (1.28).

### Primjer 1.4.3: Magnetsko polje na osi zavojnice (ili cilindričnog magneta)

Lijevo crtež prikazuje zavojnicu polumjera  $R$  i duljine  $L$  s  $N$  namotaja kojima teče struja  $I$ . Os  $z$  podudara se s osi zavojnice.



Shvatimo li struju koja teče namotajima zavojnice kao struju  $NI$  koja je ravnomjerno raspoređena po plaštu valjka, kao što prikazuje desni crtež,  $z$ -komponentu magnetskog polja u točkama na osi zavojnice možemo izraziti s

$$B_z[z] = \frac{\mu_0 NI}{2L} \left( \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right). \quad (1.29)$$

Taj izraz možemo izvesti korištenjem izraza (1.28) za magnetsko polje u točkama na osi tankog prstena kojim teče struja (vidi primjer 1.4.2). Shvatimo li plašt prikazanog valjka kao da je sastavljen od niza kružnih staza širine  $dz'$ , onda svakom takvom stazom teče struja  $dI' = NI dz'/L$ , a ako je  $z'$  koordinata položaja staze,  $-L/2 \leq z' \leq L/2$ , onda prema (1.28)  $z$ -komponentu elementa polja koje staza stvara u točki  $P$  opisujemo izrazom

$$dB_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 NI dz'/L}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}}.$$

$z$ -komponentu ukupnog polja dobivamo integracijom doprinosa svih staza,

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0 R^2 NI}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}}.$$

Supstitucijom  $\zeta = z - z'$  i korištenjem integrala  $\int (a^2 + x^2)^{-3/2} dx = x/a^2 \sqrt{a^2 + x^2} + c$  dobivamo

$$B_z = \frac{\mu_0 R^2 NI}{2L} \int_{z-L/2}^{z+L/2} \frac{d\zeta}{(R^2 + \zeta^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 R^2 NI}{2L} \frac{\zeta}{R^2 \sqrt{R^2 + \zeta^2}} \Big|_{z-L/2}^{z+L/2},$$

što nakon uvrštavanja granica integracije daje izraz (1.29).



## 2 Matematički formalizam

Ovo poglavlje se bavi općim matematičkim pojmovima vezanim uz deriviranje i integriranje skalarnih i vektorskih polja u trodimenzionalnom prostoru, a primjeri u ovom poglavlju se uglavnom odnose na jednostavne situacije iz elektromagnetizma.

### 2.1 Skalarna i vektorska polja

U matematici poljem zovemo funkciju koja svakoj točki nekog prostora pridružuje neku vrijednost. U fizici poljima koristimo kako bismo točkama trodimenzionalnog fizičkog prostora pridružili vrijednosti fizičkih veličina.

**Skalarno polje** svakoj točki prostora pridružuje vrijednost skalarne veličine. Kad se radi o trodimenzionalnom fizičkom prostoru, položaj točke u prostoru prikazujemo vektorom  $\mathbf{r}$ , a vrijednost skalarne fizičke veličine koju skalarno polje  $\phi$  pridružuje toj točki  $\mathbf{r}$  u trenutku  $t$  obilježavamo s

$$\phi[\mathbf{r}, t]. \quad (2.1)$$

Ako u prostoru koristimo pravokutne koordinate  $x$ ,  $y$  i  $z$ , onda je  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ , a vrijednost koju polje  $\phi$  pridružuje točki  $\mathbf{r}$  u trenutku  $t$  možemo napisati i kao funkciju četiriju koordinata,

$$\phi[x, y, z, t]. \quad (2.2)$$

**Vektorsko polje** točkama prostora pridružuje vektorske vrijednosti. Vektorsko polje  $\mathbf{A}$  točki  $\mathbf{r}$  u trenutku  $t$  pridružuje vektor

$$\mathbf{A}[\mathbf{r}, t], \quad (2.3)$$

a koristimo li pravokutne koordinate, taj vektor još možemo napisati kao

$$\mathbf{A}[x, y, z, t] = A_x[x, y, z, t] \hat{\mathbf{x}} + A_y[x, y, z, t] \hat{\mathbf{y}} + A_z[x, y, z, t] \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.4)$$

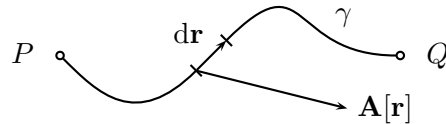
gdje funkcije  $A_x$ ,  $A_y$  i  $A_z$  zovemo komponentama vektorskog polja  $\mathbf{A}$ . Svaka od triju komponenta vektorskog polja  $\mathbf{A}$  funkcija je četiriju koordinata.

Pri formulaciji teorije elektromagnetizma koriste se derivacije i integrali skalarnih i vektorskih polja. Neoprezno bismo mogli pomisliti da činjenica da vektorsko polje ima tri komponente, pri čemu svaka od njih ovisi o četiri koordinate, podrazumijeva da će se razmatrati 12 različitih derivacija tog polja. Srećom, zahvaljujući dobro razvijenoj matematičkoj teoriji polja, situacija je znatno jednostavnija. Za razumijevanje osnovnih zakona elektromagnetizma dovoljno je korištenje svega nekoliko specifičnih kombinacija derivacija skalarnog polja i komponentata vektorskog polja. Te derivacije su *gradijent* skalarnog polja te *divergencija* i *rotacija* vektorskog polja. Situacija je slična i kada se radi o integralima. Postoji svega nekoliko načina integriranja skalarnih i vektorskih polja koja su od praktične važnosti pri formulaciji zakona elektromagnetizma. Riječ je o integraciji vektorskog polja po krivulji i po plohi te o integraciji skalarnog polja po volumenu. Nastavak ovog poglavlja bavi se najprije integralima polja, a nakon toga i njihovim derivacijama te teoremima koji povezuju derivacije i integrale polja.

### 2.2 Integral vektorskog polja po krivulji

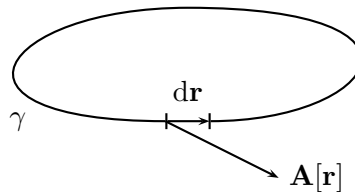
**Krivulja** (engl. *curve, path*) je jednodimenzionalan objekt i ona može biti otvorena ili zatvorena (engl. *open curve, closed curve*).

Otvorena krivulja omeđena je dvjema krajnjim točkama. Zbog konzistentne provedbe računa krivulju je potrebno orijentirati odabirom jednog od dva moguća smjera kretanja duž krivulje. U skladu s odabranom orijentacijom otvorene krivulje jednu od njenih krajnjih točaka zovemo početnom, a onu drugu zovemo konačnom točkom krivulje. Uobičajene oznake za krivulju su  $\gamma$ ,  $\Gamma$ ,  $c$  i  $C$ , a početnu i konačnu točku često obilježavamo s  $P$  i  $Q$ . Elementom krivulje smatramo vektor  $d\mathbf{r}$  čiji je smjer određen tangentom na krivulju i njenom orijentacijom. Slika prikazuje otvorenu krivulju  $\gamma$  s početnom točkom  $P$  i krajnjom točkom  $Q$ .



U jednoj od točaka otvorene krivulje na gornjoj slici naznačen je element krivulje  $d\mathbf{r}$  te vektor polja  $\mathbf{A}$ .

Zatvorena krivulja nije omeđena, ali i ona mora biti orijentirana. Slika prikazuje zatvorenu krivulju  $\gamma$ , element krivulje  $d\mathbf{r}$  i vektor polja  $\mathbf{A}$ .



Smjer elementa  $d\mathbf{r}$  na gornjoj slici pokazuje orijentaciju krivulje  $\gamma$ . (Svaka zatvorena krivulja omeđuje beskonačno mnoštvo različitih otvorenih ploha o kakvima će biti više riječi u odjeljku 2.3.)

**Integral vektorskog polja po krivulji:** Neka je  $\gamma$  otvorena krivulja s početnom točkom  $P$  i konačnom točkom  $Q$ . Integral vektorskog polja  $\mathbf{A}$  po krivulji  $\gamma$  od točke  $P$  do točke  $Q$  je

$$\int_{\gamma:P}^Q \mathbf{A}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.5)$$

Izraz pod znakom integrala skalarni je produkt vektora polja  $\mathbf{A}$  u točki krivulje čiji je položaj  $\mathbf{r}$  i elementa krivulje  $d\mathbf{r}$  u toj točki. Integraciju vektorskog polja  $\mathbf{A}$  po zatvorenoj orijentiranoj krivulji  $\gamma$  može se započeti u bilo kojoj točki krivulje, a provodi se duž čitave njene duljine. Kako bismo naglasili da se radi o zatvorenoj krivulji koristi se simbol integrala s kružićem,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{A}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.6)$$

Integracija se provodi u smjeru određenom orijentacijom krivulje.

### Primjer 2.2.1: Integral magnetskog polja ravne žice duž kružnice

Integriramo li magnetsko polje beskonačne ravne žice kojom teče stalna struja  $I$  (vidi primjer 1.4.1) po kružnici polumjera  $s$  (opsega  $2\pi s$ ) koja leži u ravnini okomitoj na žicu i koja ima središte u samoj žici, dobit ćemo

$$\oint \mathbf{B}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r} = B[s] 2\pi s = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} 2\pi s = \mu_0 I$$

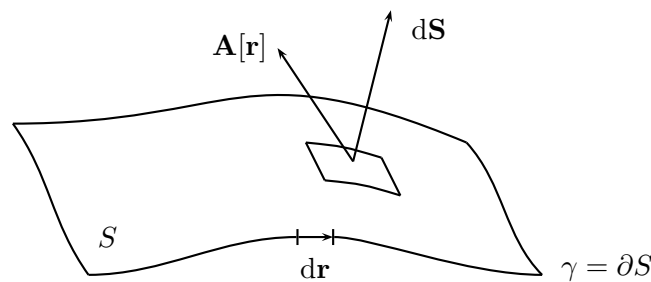
(uzeli smo da se orijentacija krivulje podudara sa smerom magnetskog polja). Gornji integral izračunali na jednostavan način jer je iznos magnetskog polja  $B[s] = \mu_0 I / 2\pi s$  isti u svim točkama kružnice, polje je u svim točkama kružnice paralelno s tangentom na kružnicu, a ukupna duljina kružnice je  $2\pi s$ .

Dobiveni rezultat u skladu je s Ampèreovim zakonom prema kojemu je integral magnetskog polja kroz bilo koju zatvorenu krivulju jednak umnošku struje koja prolazi kroz plohu omeđenu krivuljom i magnetske konstante  $\mu_0$ .

## 2.3 Integral vektorskog polja po plohi

**Ploha** (engl. *surface*) je dvodimenzionalan objekt te ona može biti zatvorena ili otvorena.

Otvorena ploha omeđena je zatvorenom krivuljom. Oznaka za plohu je  $S$ , a zatvorenu krivulju koja omeđuje otvorenu plohu  $S$  označavamo s  $\partial S$ . Element plohe je vektorska veličina  $d\mathbf{S}$ . Iznos vektorskog elementa plohe,  $dS = |d\mathbf{S}|$ , jednak je površini samog elementa. Smjer elementa  $d\mathbf{S}$  okomit je na plohu pri čemu je orijentiran u smjeru napredovanja desnog vijka koji se zakreće sukladno orijentaciji zatvorene krivulje  $\partial S$ . Slika prikazuje otvorenu plohu  $S$ , zatvorenu krivulju  $\gamma = \partial S$  koja ju omeđuje, element plohe  $d\mathbf{S}$  te vektor polja  $\mathbf{A}$ .



Zatvorena ploha nije omeđena, a jendoznačno omeđuje volumen koji se nalazi unutar nje. Element zatvorene plohe dogovorno je orijentiran prema van.

**Integral vektorskog polja po plohi (tok polja):** Ako je  $\mathbf{A}$  vektorsko polje, a  $S$  je orijentirana otvorena ploha, integral  $\mathbf{A}$  po  $S$  je

$$\Phi_A = \int_S \mathbf{A}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.7)$$

Izraz pod znakom integrala skalarni je produkt vektorskog elementa plohe  $d\mathbf{S}$  u točki  $\mathbf{r}$  i vektorskog polja  $\mathbf{A}$  u toj točki. Kad se integracija polja  $\mathbf{A}$  provodi po zatvorenoj plohi  $S$  koristimo znak integrala s kružićem,

$$\Phi_A = \oint_S \mathbf{A}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.8)$$

Skalarnu veličinu  $\Phi_A$  koju dobivamo integracijom vektorskog polja  $\mathbf{A}$  po plohi  $S$  još zovemo tokom (engl. *flux*) polja  $\mathbf{A}$  kroz plohu  $S$ .

**Primjer 2.3.1:** *Električna struja kao integral gustoće struje po poprečnom presjeku vodiča*

Neka je otvorena ploha  $S$  poprečni presjek vodiča kojim teče električna struja  $I$ , a  $\mathbf{J}$  neka je

gustoća električne struje u točkama unutar vodiča. Struja  $I$  integral je vektorskog polja  $\mathbf{J}$  po plohi  $S$ ,

$$I = \int_S \mathbf{J}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{S}.$$

Pojednostavljenu inačicu gornjeg izraza koristili smo u Primjeru 1.1.3 gdje smo pretpostavili da je ploha  $S$  okomita na vodič te da je  $\mathbf{J}$  okomita na  $S$  i svuda unutar vodiča jednakog iznosa. Time se gornji izraz sveo ja  $I = JS$ .

**Primjer 2.3.2:** Tok električnog polja kroz sferu u čijem središtu je nabijena čestica

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4r^2\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

... ne ovisi o polumjeru sfere ... kao ni o obliku zatvorene plohe ...

**Primjer 2.3.3:** Tok električnog polja kroz oplošje cilindra čija os leži na jednoliko nabijenom pravcu

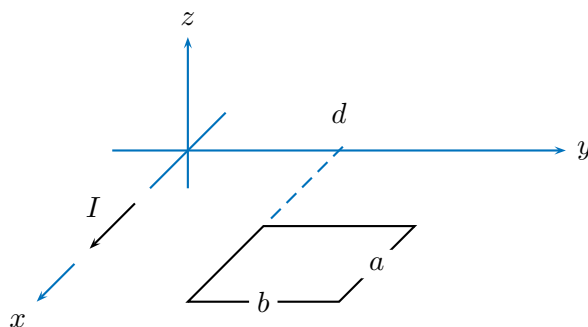
Polje smo izračunali u primjeru 1.3.4,

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} 2s\pi L = \frac{q}{\epsilon_0}$$

... ne ovisi o polumjeru cilindra ... kao ni o obliku zatvorene plohe ...

**Primjer 2.3.4:** Tok magnetskog polja kroz pravokutnik pored kojeg teče struja

Duž  $x$ -osi u njenom pozitivnom smjeru teče stalna struja  $I$ , a u ravnini  $z = 0$  se nalazi pravokutnik sa stranicama duljine  $a$  i  $b$ . Stranica duljine  $a$  paralelna je s  $x$ -osi i udaljena je od nje za  $d$ .



Odredit ćemo tok magnetskog polja kroz pravokutnik.

Korištenjem izraza za iznos magnetskog polja pored pravca kojim teče struja koji smo izveli u primjeru 1.4.1, polje u točkama ravnine  $z = 0$  možemo izraziti s

$$\mathbf{B}[y] = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{\mathbf{z}}.$$

Kao element plohe pravokutnika odabiremo tanku prugu paralelnu s  $x$ -osi jer je po čitavoj njoj

površini magnetsko polje ima jednak iznos. Duljina pruge je  $a$ , a širina joj je  $dy$ , pa je vektorski element plohe

$$d\mathbf{S} = a dy \hat{\mathbf{z}}.$$

Tok magnetskog polja kroz pravokutnik je prema tome

$$\Phi_B = \int \mathbf{B}[y] \cdot d\mathbf{S} = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} a dy = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_d^{d+b} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left[ \frac{d+b}{d} \right].$$

Za  $I = 1 \text{ A}$  i  $a = b = d = 10 \text{ cm}$ , dobili bismo  $\Phi_B \simeq 1.4 \times 10^{-8} \text{ T m}^2$ .

## 2.4 Integral skalarnog polja po volumenu

**Volumen** (engl. *volume, region*) je dio trodimenzionalnog prostora omeđen zatvorenim plohom. Oznaka za volumen je  $V$ , a za element volumena oznaka je  $dV$ . Zatvorenu plohu koja omeđuje volumen  $V$  označavamo s  $\partial V$ .

**Integral skalarnog polja po volumenu:** Ako je  $\phi$  skalarno polje, integral tog polja po volumenu  $V$  je

$$\int_V \phi[\mathbf{r}] dV. \quad (2.9)$$

Izraz pod znakom integrala umnožak je elementa volumena  $dV$  u točki  $\mathbf{r}$  i vrijednosti skalarnog polja  $\phi$  u toj točki. Ako integral skalarnog polja  $\phi$  po volumenu  $V$  predstavlja količinu fizikalne veličine  $Q$  sadržane unutar  $V$ , onda skalarno polje  $\phi$  smatramo volumnom gustoćom fizikalne veličine  $Q$ .

### Primjer 2.4.1: Sfernosimetrična raspodjela naboja (naivni model nabijene čestice)

Koncept nabijene čestice sa sobom donosi neke matematičke probleme među kojima je singularnost električnog polja u točki u kojoj se čestica nalazi. Taj problem možemo otkloniti modeliranjem čestice kao sfernosimetrične raspodjele naboja opisane volumnom gustoćom električnog naboja

$$\rho[r] = \rho_0 \exp[-(r/a)^2],$$

gdje je  $r$  udaljenost od njenog središta, konstanta  $\rho_0$  je gustoća naboja u središtu, a konstanta  $a$  opisuje širinu raspodjele. Eksponencijalna funkcija osigurava pad volumne gustoće naboja s udaljenošću.

Ukupni naboj raspodjele integral je volumne gustoće naboja po svom prostoru,

$$q = \int dq = \int \rho[r] dV.$$

S obzirom na sfernu simetriju gustoće naboja, element volumena  $dV$  odabiremo kao sfernu ljusku polumjera  $r$  (površine  $4r^2\pi$ ) i debljine  $dr$ . To znači da element volumena možemo izraziti kao umnožak njegove površine i njegove debljine,

$$dV = 4r^2\pi dr.$$

Ukupni naboj sada je

$$q = \int_0^{\infty} \rho_0 e^{-(r/a)^2} 4r^2 \pi dr = 4\pi \rho_0 \int_0^{\infty} r^2 e^{-(r/a)^2} dr = 4\pi a^3 \rho_0 \int_0^{\infty} u^2 e^{-u^2} du.$$

Uvidom u tablice integrala nalazimo  $\int_0^{\infty} u^2 e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/4$  te dobivamo

$$q = \pi^{3/2} a^3 \rho_0.$$

Polaznu volumnu gustoću električnog naboja sada možemo izraziti korištenjem ukupnog naboja raspodjela umjesto njene središnje gustoće,

$$\rho[r] = \frac{q}{\pi^{3/2} a^3} \exp[-(r/a)^2].$$

## 2.5 Gradijent skalarnog polja i teorem o gradijentu

Kad je riječ o prvoj derivaciji skalarnog polja po prostornim koordinatama, pokazalo se dovoljnim uvesti samo jedan oblik derivacije skalarnog polja poznat kao gradijent.

**Gradijent skalarnog polja:** Ako je  $\phi$  skalarno polje, gradijent polja  $\phi$  je vektorsko polje koje označavamo s

$$\nabla \phi, \quad (2.10)$$

gdje je  $\nabla$  vektorski diferencijalni operator poznat kao "nabla". Smjer vektora  $\nabla \phi$  u nekoj točki prostora jest smjer u kojem samo polje  $\phi$  najbrže raste. Iznos vektora  $\nabla \phi$  proizlazi iz zahtjeva da promjena  $d\phi$  iznosa polja  $\phi$  pri pomaku  $d\mathbf{r}$  bude dana skalarnim produktom  $\nabla \phi$  i  $d\mathbf{r}$ ,

$$d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.11)$$

U pravokutnim koordinatama gradijent skalarnog polja  $\phi$  možemo izraziti kao

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.12)$$

gdje parcijalne derivacije skalarnog polja po koordinatama  $x$ ,  $y$  i  $z$  prepoznavamo kao  $x$ ,  $y$  i  $z$ -komponentu gradijenta tog skalarnog polja.

**Primjer 2.5.1:** *Gradijent skalarnog polja  $\phi[\mathbf{r}] = f[r]$*

Najprije ćemo izračunati gradijent skalarnog polja  $\phi[\mathbf{r}] = r$ , gdje je  $r = |\mathbf{r}|$  udaljenost točke prostora od ishodišta. S obzirom da ovo polje najbrže raste s udaljavanjem od ishodišta očekujemo da će njegov gradijent poprimiti smjer vektora  $\mathbf{r}$ . Polje  $\phi$  možemo izraziti korištenjem pravokutnih koordinata,

$$\phi[x, y, z] = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

a korištenjem (2.12) kao gradijent polja dobivamo

$$\nabla \phi[x, y, z] = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) = r^{-1} \mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}},$$

odn. kreće zapisano  $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$ . Račun je potvrdio očekivani smjer gradijenta polja  $\phi$ .

Gradijent polja  $\phi[\mathbf{r}] = f[r]$ , gdje je  $f$  derivabilna funkcija, računamo primjenom lančanog pravila,

$$\nabla\phi[\mathbf{r}] = \nabla f[r] = \frac{df[r]}{dr} \nabla r = f'[r] \hat{\mathbf{r}},$$

pri čemu smo koristili gore izvedeni rezultat  $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$ . Uočavamo da za rastuću  $f$  gradijent polja  $\phi[\mathbf{r}] = f[r]$  poprima smjer vektora  $\mathbf{r}$ , dok za padajuću  $f$  on poprima suprotan smjer.

**Teorem o gradijentu:** Integral gradijenta skalarnog polja  $\phi$  po bilo kojoj krivulji s početnom točkom  $P$  i konačnom točkom  $Q$  jednak je razlici vrijednosti skalarnog polja u točki  $Q$  i vrijednosti u točki  $P$ ,

$$\int_{\mathbf{r}_P}^{\mathbf{r}_Q} \nabla\phi[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r} = \phi[\mathbf{r}_Q] - \phi[\mathbf{r}_P]. \quad (2.13)$$

Iz ovog teorema izravno slijedi da je gradijent svakog skalarnog polja konzervativno vektorsko polje.

## 2.6 Divergencija vektorskog polja i teorem o divergenciji (Gaussov teorem)

**Divergencija vektorskog polja:** Ako je  $\mathbf{A}$  vektorsko polje, divergencija tog polja je *skalarno* polje koje obilježavamo s

$$\nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (2.14)$$

gdje je  $\nabla$  vektorski diferencijalni operator nabra, a pisanje operatora  $\cdot$  je obavezno. Vrijednost divergencije vektorskog polja u nekoj točki razmjerna je toku polja kroz zatvorenu plohu koja omeđuje okolinu te točke. Vrijedi jednakost

$$d\Phi_A = \nabla \cdot \mathbf{A} dV, \quad (2.15)$$

gdje je  $d\Phi_A$  tok polja  $\mathbf{A}$  kroz zatvorenu plohu koja omeđuje element  $dV$ .

Koristimo li pravokutne koordinate, ako su  $A_x$ ,  $A_y$  i  $A_z$  komponente vektorskog polja  $\mathbf{A}$ , divergencija tog polja se može izraziti kao

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (2.16)$$

### Primjer 2.6.1: Prepoznavanje divergencije na grafičkom prikazu polja

Divergencija  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  vektorskog polja  $\mathbf{A}$  u točki  $\mathbf{r}_0$  opisuje neke aspekte prostorne ovisnosti polja  $\mathbf{A}$  u okolini točke  $\mathbf{r}_0$ , a dodamo li vektorskom polju konstantni vektor (homogeno vektorsko polje), divergencija će ostati nepromijenjena. Tu činjenicu možemo iskoristiti kako bismo na grafičkom prikazu vektorskog polja lakše prepoznali prostorne promjene povezane s divergencijom. Umjesto da u okolini točke  $\mathbf{r}_0$  nacrtamo samo polje  $\mathbf{A}[\mathbf{r}]$ , nacrtat ćemo polje  $\mathbf{A}[\mathbf{r}] - \mathbf{A}[\mathbf{r}_0]$ . To znači da

ćemo u točki  $\mathbf{r}_0$  imati nulvektor, dok ćemo u okolnim točkama imati vektor koji opisuje odstupanje polja  $\mathbf{A}$  od vrijednosti koju ima u točki  $\mathbf{r}_0$ .

Kao primjer razmotrit ćemo jednostavno polje

$$\mathbf{A}[\mathbf{r}] = \alpha \mathbf{r} = \alpha(x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}),$$

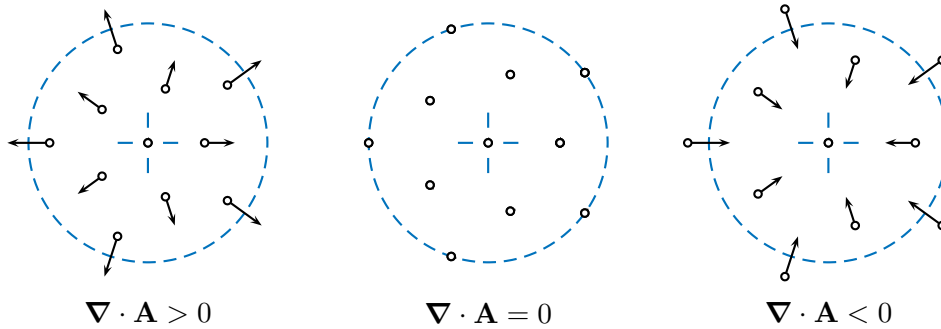
gdje je  $\alpha$  konstanta. Divergenciju računamo korištenjem izraza (2.16) i dobivamo

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \dots = 3\alpha,$$

što znači da je ona jednaka svuda u prostoru te da njen predznak ovisi o predznaku konstante  $\alpha$ . Nacrtamo li u okolini točke  $\mathbf{r}_0 = x_0 \hat{\mathbf{x}} + y_0 \hat{\mathbf{y}} + z_0 \hat{\mathbf{z}}$  polje

$$\mathbf{A}[\mathbf{r}] - \mathbf{A}[\mathbf{r}_0] = \alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \alpha((x - x_0) \hat{\mathbf{x}} + (y - y_0) \hat{\mathbf{y}} + (z - z_0) \hat{\mathbf{z}}),$$

za  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$  i za  $\alpha < 0$  dobivamo slike poput sljedećih (točka  $\mathbf{r}_0$  nalazi se u sredini svake od triju slika, a iscrtkana kružnica predstavlja zatvorenu plohu koja obuhvaća okolinu točke  $\mathbf{r}_0$ ):



Uočavamo da, kad bismo malu okolinu točke  $\mathbf{r}_0$  zatvorili plohom, u slučaju pozitivne divergencije polja imali bismo pozitivan tok polja kroz tu plohu, u slučaju divergencije jednake nuli i tok bi bio jednak nuli, dok bi u slučaju negativne divergencije imali negativan tok polja kroz plohu.

U ovom jednostavnom primjeru izgled slika ne ovisi o odabiru (orijentaciji u prostoru) ravnine u kojoj crtamo polje, a sami vektori uvijek leže u odabranoj ravnini. U općenitom slučaju to nije tako.

**Teorem o divergenciji ili Gaussov teorem:** Integral divergencije  $\nabla \cdot \mathbf{A}$  vektorskog polja  $\mathbf{A}$  po volumenu  $V$  jednak je toku polja  $\mathbf{A}$  kroz zatvorenu plohu  $\partial V$  koja omeđuje volumen  $V$ ,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}[\mathbf{r}] dV = \oint_{\partial V} \mathbf{A}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.17)$$

**Primjer 2.6.2:** Očuvanje električnog naboja i jednačba kontinuiteta

Električni naboj  $q$  sadržan u volumenu  $V$  možemo izraziti kao integral volumne gustoće električnog naboja  $\rho$  po volumenu  $V$ ,

$$q[t] = \int_V \rho[\mathbf{r}, t] dV.$$



Struju  $I$  električnog naboja kroz zatvorenu plohu  $\partial V$  koja omeđuje volumen  $V$  možemo izraziti kao integral gustoće struje električnog naboja  $\mathbf{J}$  kroz  $\partial V$ ,

$$I = \oint_{\partial V} \mathbf{J}[\mathbf{r}, t] \cdot d\mathbf{S},$$

a korištenjem Gaussovog teorema možemo ju izraziti i kao integral divergencije volumne gustoće struje po volumenu,

$$I = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}[\mathbf{r}, t] dV.$$

Prema zakonu očuvanja električnog naboja, naboj  $q$  sadržan u  $V$  se u vremenu  $dt$  može promijeniti samo za onoliko koliko je naboja u istom vremenu proteklo kroz  $\partial V$ . Tu tvrdnju možemo izraziti s  $dq = -I dt$ , gdje je negativni predznak prisutan zato jer pozitivna struja umanjuje naboj u volumenu, a nakon dijeljenja s  $dt$  imamo

$$\frac{dq}{dt} = -I.$$

Uvrstimo li integralne izraze za naboj  $q$  i struju  $I$  u gornji izraz, nakon deriviranja integrala po vremenu dobivamo

$$\int_V \frac{\partial \rho[\mathbf{r}, t]}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}[\mathbf{r}, t] dV,$$

a s obzirom da ta jednakost mora vrijediti za svaki  $V$ , slijedi jednakost

$$\frac{\partial \rho[\mathbf{r}, t]}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}[\mathbf{r}, t],$$

koja u diferencijalnom obliku izražava zakon očuvanja električnog naboja i koja je u elektromagnetizmu poznata kao *jednadžba kontinuiteta električnog naboja*.

sadf

## 2.7 Rotacija vektorskog polja i teorem o rotaciji (Stokesov teorem)

asdf

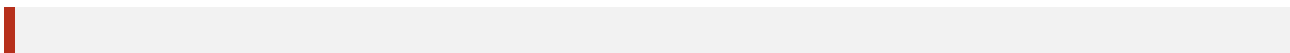
**Rotacija vektorskog polja:** Ako je  $\mathbf{A}$  vektorsko polje, rotacija tog polja je *vektorsko* polje koje obilježavamo s

$$\nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.18)$$

gdje je  $\nabla$  vektorski diferencijalni operator nabra, a pisanje operatora  $\times$  je obavezno. Svojstvo rotacije polja  $\mathbf{A}$  jest da skalarna veličina  $(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$  odgovara integralu polja  $\mathbf{A}$  po krivulji koja omeđuje element plohe  $d\mathbf{S}$ . To znači da je smjer vektora  $\nabla \times \mathbf{A}$  onaj smjer u kojem treba usmjeriti element plohe  $d\mathbf{S}$  kako bi integral polja  $\mathbf{A}$  po krivulji koja omeđuje  $d\mathbf{S}$  bio najveći mogući.

U pravokutnim koordinatama, ako su  $A_x$ ,  $A_y$  i  $A_z$  komponente vektorskog polja  $\mathbf{A}$ , vektor rotacije tog polja može se izraziti kao

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.19)$$

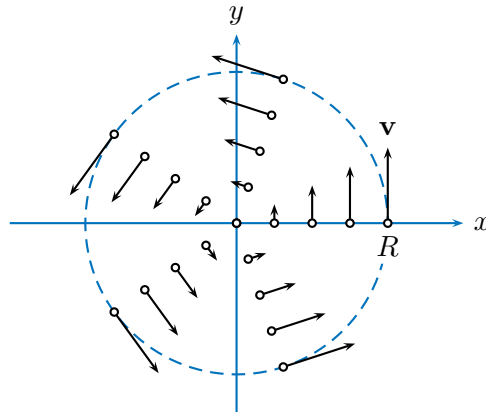


**Primjer 2.7.1:** Vektorsko polje s homogenom rotacijom (vrtnja krutog tijela)

Kao primjer vektorskog polja koje ima rotaciju različitu od nule razmotrit ćemo polje koje opisuje brzinu čestica krutog tijela koje se vrti oko  $z$ -osi kutnom brzinom  $\omega_z$ . Vektorsko polje brzine dano je izrazom

$$\mathbf{v}[\mathbf{r}] = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

gdje je  $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \hat{\mathbf{z}}$  vektor kutne brzine, a  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$  je položaj čestice u prostoru. Slika prikazuje brzine čestica u nekim točkama ravnine  $z = 0$  u slučaju u kojem je  $\omega_z > 0$  (vektor  $\boldsymbol{\omega}$  usmjeren je iz slike prema gledatelju).



Pokazat ćemo da je rotacija polja  $\mathbf{v}$  jednaka u svim točkama prostora (kažemo da je homogena), a zatim ćemo na dva različita načina izračunati integral polja  $\mathbf{v}$  po kružnici polumjera  $R$  naznačenoj isprekidanom linijom na gornjoj slici.

Najprije koristimo raspisujemo polje  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega_z \hat{\mathbf{z}} \times (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) = \omega_z (x \hat{\mathbf{y}} - y \hat{\mathbf{x}}) = -\omega_z y \hat{\mathbf{x}} + \omega_z x \hat{\mathbf{y}},$$

gdje prepoznajemo njegove komponente  $v_x = -\omega_z y$ ,  $v_y = \omega_z x$  i  $v_z = 0$ . Zatim, korištenjem formule (2.19) računamo rotaciju polja  $\mathbf{v}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} = 2\omega_z \hat{\mathbf{z}} = 2\boldsymbol{\omega},$$

gdje nalazimo da je ona u svim točkama prostora jednaka dvostrukoj kutnoj brzini vrtnje tijela.

Integral polja  $\mathbf{v}$  duž kružnice polumjera  $R$  sa središtem u ishodištu lako je izračunati jer polje  $\mathbf{v}$  u svim točkama kružnice ima isti iznos  $v = \omega_z R$  i smjer tangente na kružnicu. Ako je kružnica orijentirana u pozitivnom smjeru, s obzirom da je njena duljina (opseg)  $2\pi R$ , imamo

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = (\omega_z R)(2\pi R) = 2\pi R^2 \omega_z.$$

Isti rezultat dobili bismo i kad bismo, primjenom Stokesovog teorema, izračunali integral rotacije polja  $\mathbf{v}$  po krugu omeđenom kružnicom. S obzirom da je površina kruga  $R^2\pi$  dobili bismo

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = (2\omega_z)(R^2\pi) = 2\pi R^2 \omega_z,$$

što očekivano podudara s ranije dobivenim rezultatom.

**Teorem o rotaciji ili Stokesov teorem:** Integral rotacije vektorskog polja  $\mathbf{A}$  po otvorenoj plohi  $S$  jednak je integralu polja  $\mathbf{A}$  po zatvorenoj krivulji  $\gamma$  koja omeđuje plohu  $S$ ,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.20)$$

To ujedno znači da je integral rotacije vektorskog polja  $\mathbf{A}$  jednak za sve plohe  $S$  omeđene istom zatvorenom krivuljom  $\gamma = \partial S$ .

## 2.8 Konzervativnost vektorskog polja i elektrostatski potencijal

Matematičko svojstvo konzervativnosti vektorskog polja u fizici je usko povezano s mogućnošću definiranja potencijalne energije. U okviru elektrostatike se, zahvaljujući konzervativnosti električne sile, može definirati elektrostatsku potencijalnu energiju čestice. Osim toga uvodi se i pomoćno skalaro polje koje zovemo elektrostatskim potencijalom, a koje se pokazuje vrlo korisnim matematičkim alatom pri formulaciji i rješavanju problema u elektrostatiki.<sup>1</sup>

**Konzervativnost vektorskog polja:** Za vektorsko polje  $\mathbf{A}$  kažemo da je konzervativno ako za bilo koji odabir točaka  $P$  i  $Q$  u prostoru integral

$$\int_P^Q \mathbf{A}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r} \quad (2.21)$$

ne ovisi o odabiru krivulje duž koje je provedena integracija, odnosno ako za svaku zatvorenu krivulju vrijedi

$$\oint \mathbf{A}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (2.22)$$

odnosno, primjenom Stokesovog teorema o rotaciji vektorskog polja (2.20) na gornji uvjet, polje je konzervativno ako je svuda u prostoru njegova rotacija jednaka nuli,

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (2.23)$$

Uvjeti (2.21), (2.22) i (2.23) su istovjetni, a strogo govoreći još je potrebno navesti i neka ograničenja povezana s topologijom prostora na koji se ti uvjeti odnose, ali to ćemo ovdje izostaviti.

Istovjetnost uvjeta (2.21) i uvjeta (2.22) prepoznamo razmatranjem proizvoljnog para točaka  $P$  i  $Q$  i dviju različitih krivulja  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  omeđenih tim točkama.



Najprije pokazujemo da iz (2.21) slijedi (2.22). Pretpostavimo li da je za polje  $\mathbf{A}$  ispunjen uvjet (2.21), integral  $\mathbf{A}$  od  $P$  do  $Q$  duž  $\gamma_1$  jednak je integralu  $\mathbf{A}$  od  $P$  do  $Q$  duž  $\gamma_2$ , a suprotnog je

<sup>1</sup>U staromodnom (kvazi-povijesnom) pristupu elektromagnetizmu kojeg slijedimo u ovoj skripti potencijal shvaćamo kao matematički alat. U modernom pristupu elektromagnetizmu potencijal je jedna od komponenata elektromagnetnog polja koje smatramo temeljnim poljem.

predznaka u odnosu na integral  $\mathbf{A}$  od  $Q$  do  $P$  duž  $\gamma_2$ ,

$$\int_{\gamma_1:P}^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2:P}^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\gamma_2:Q}^P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.24)$$

(promjena smjera integracije duž krivulje mijenja predznak integrala). Iz gornje jednakosti slijedi

$$\int_{\gamma_1:P}^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2:Q}^P \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (2.25)$$

gdje smo zbroj integrala  $\mathbf{A}$  od  $P$  do  $Q$  duž  $\gamma_1$  i integrala  $\mathbf{A}$  od  $Q$  do  $P$  duž  $\gamma_2$ , a koji je prema (2.24) jednak nuli, prepoznali kao integral po zatvorenoj krivulji  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  koju čine  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ . S obzirom da je odabir točkica  $P$  i  $Q$  kao i krivulja  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  omeđenih tim točkama proizvoljan, ovim razmatranjem smo pokazali da je integral  $\mathbf{A}$  duž bilo koje zatvorene krivulje u prostoru jednak nuli, tj. da je ispunjen uvjet (2.22). Argument možemo iskoristiti i u suprotnom smjeru te njime pokazati da iz uvjeta (2.22) slijedi uvjet (2.21). Naime, na proizvoljnoj zatvorenoj krivulji  $\gamma$  možemo odabrati proizvoljne točke  $P$  i  $Q$  čime  $\gamma$  rastavljamo na dvije otvorene krivulje  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ . Pretpostavimo li da je za polje  $\mathbf{A}$  i krivulju  $\gamma$  ispunjen uvjet (2.22), slijedi da mora vrijediti (2.25), odn. (2.24), te u konačnici da je ispunjen uvjet (2.21).

Konzervativno vektorsko polje  $\mathbf{A}$  i odabrana točka  $\mathbf{r}_0$  u prostoru jednoznačno određuju skalarno polje  $\phi$  definirano s

$$\phi[\mathbf{r}] = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}' \quad (2.26)$$

**Konzervativna sila i potencijalna energija u mehanici:** Ako silu  $\mathbf{F}$  koja djeluje na česticu možemo opisati konzervativnim vektorskim poljem  $\mathbf{F}[\mathbf{r}]$ , za samu silu kažemo da je konzervativna, a možemo joj pridružiti skalarno polje  $U[\mathbf{r}]$  koje opisuje potencijalnu energiju čestice.

Prema definiciji, potencijalna energija  $U$  čestice u točki  $\mathbf{r}$  jednaka je radu koji je potrebno obaviti kako bismo, savladavajući djelovanje konzervativne sile  $\mathbf{F}$ , česticu iz dogovorene referentne točke  $\mathbf{r}_0$  doveli u točku  $\mathbf{r}$ . Na putu od  $\mathbf{r}_0$  do  $\mathbf{r}$ , element rada koji obavljamo pri pomaku  $d\mathbf{r}'$  u okolini točke  $\mathbf{r}'$  je  $dW' = -\mathbf{F}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}'$ . Potencijalna energija je prema tome

$$U[\mathbf{r}] = \int dW' = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}',$$

što je skalarno polje definirano integralom konzervativnog vektorskog polja  $\mathbf{F}$  po bilo kojoj krivulji s početnom točkom  $\mathbf{r}_0$  i konačnom točkom  $\mathbf{r}$ .

Kada polje sile  $\mathbf{F}$  ne bi bilo konzervativno, gornji integral ovisio bi o odabiru krivulje (putanje) te  $U[\mathbf{r}]$  ne bi bila jednoznačno definirana veličina.

### Primjer 2.8.1: Konzervativnost statičnog električnog polja

Pokazat ćemo da je općenito statično električno polje  $\mathbf{E}$  konzervativno polje. Samim time pokazujemo da je polje sile  $q\mathbf{E}$  koja djeluje na česticu naboja  $q$  konzervativno i možemo mu pridružiti potencijalnu energiju (vidi primjer 2.8.2).

Najprije pokazujemo da je električno polje  $\mathbf{E}_0$  čestice naboja  $q_0$  koja se nalazi u ishodištu,

$$\mathbf{E}_0[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

konzervativno. Razmatramo integral tog polja po općenitoj otvorenoj krivulji s početnom točkom  $P$  i konačnom točkom  $Q$ ,

$$\int_{r_P}^{r_Q} \mathbf{E}_0[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_P}^{r_Q} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}.$$

Svaki element  $d\mathbf{r}$  krivulje možemo prikazati kao

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} dr + d\mathbf{r}_\perp,$$

gdje je  $\hat{\mathbf{r}} dr$  tzv. radijalni dio elementa krivulje, a  $d\mathbf{r}_\perp$  je okomit na radijalni dio i zovemo ga transverzalnim dijelom. Transverzalni elementi ne doprinose integralu jer su okomiti na električno polje, što znači da integralu doprinose samo radijalni elementi krivulje. Time se integral koji razmatramo svodi na

$$\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_P}^{r_Q} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_P}^{r_Q} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q} \right),$$

iz čega je vidljivo da on ne ovisi o odabiru krivulje, već smo o odabiru njenih krajnjih točaka. Zaključujemo da je uvjet (2.21) ispunjen te da je električno polje nabijene čestice konzervativno polje.

Općenito statično električno polje može se izraziti kao zbroj električnih polja nabijenih čestica, a s obzirom da su ta polja konzervativna, lako je pokazati da isto svojstvo ima i njihov zbroj.

### Primjer 2.8.2: Potencijalna energija nabijene čestice u statičnom električnom polju

Najprije razmatramo električno polje  $\mathbf{E}_0$  koje stvara čestica naboja  $q_0$  koja miruje u ishodištu (vidi primjer 2.8.1) i česticu naboja  $q$  koja se nalazi u točki  $\mathbf{r}$ . Potencijalna energija čestice naboja  $q$  u točki  $\mathbf{r}$  jest rad koji je potrebno obaviti da se tu česticu iz prostorne beskonačnosti dovede u točku  $\mathbf{r}$ . Putem je potrebno savladavati silu  $q\mathbf{E}_0[\mathbf{r}]$  odnosno djelovati silom  $-q\mathbf{E}_0[\mathbf{r}]$ , a to znači da se na elementu putanje  $d\mathbf{r}$  obavlja element rada  $dW = -q\mathbf{E}_0[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r}$ . Potencijalna energija je prema tome

$$U[\mathbf{r}] = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} dW = -q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_0[\mathbf{r}'] \cdot d\mathbf{r}' = \dots = q \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r},$$

gdje tri točke podrazumijevaju korake slične onima iz primjera 2.8.1. Prepoznamo da je potencijalna energija nabijene čestice koja se nalazi u električnom polju druge nabijene čestice razmjerna umnošku naboja čestica te da je obrnuto razmjerna udaljenosti među njima.

U općenitoj situaciji u kojoj imamo  $N$  čestica čiji su naboji  $q_i$  i čiji su položaji  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ukupno električno polje je zbroj polja koja stvaraju te čestice, a kad bismo česticu naboja  $q$  doveli u točku  $\mathbf{r}$ , njena bi potencijalna energija bila zbroj potencijalnih energija koje čestica ima u odnosu na električno polje svake od  $N$  čestica. Potencijalnu energiju možemo izraziti kao

$$U[\mathbf{r}] = q\phi[\mathbf{r}],$$

gdje skalarno polje

$$\phi[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}$$

zovemo *elektrostatskim potencijalom*. Kad je raspored naboja u prostoru opisan volumnom gustoćom naboja  $\rho[\mathbf{r}]$ , elektrostatski potencijal računamo integralom

$$\phi[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho[\mathbf{r}'] dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Kao mjernu jedinicu elektrostatskog potencijala može se koristiti V (volt) ili  $\text{J C}^{-1}$  (džul po kulonu).

**Primjer 2.8.3:** Računanje električnog polja iz elektrostatskog potencijala

Ako je konzervativnoj sili  $\mathbf{F}$  pridružena potencijalna energija  $U$  (vidi primjer ??), promjena potencijalne energije koja nastupa pri pomaku čestice  $d\mathbf{r}$  je

$$dU = -\mathbf{F}[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r}.$$

S druge strane, promjena skalarnog polja  $U$  pri pomaku  $d\mathbf{r}$  može se izraziti gradijentom tog polja koristeći svojstvo (2.11),

$$dU = \nabla U[\mathbf{r}] \cdot d\mathbf{r}.$$

S obzirom da obje jednakosti moraju vrijediti u svakoj točki prostora te za sve orijentacije pomaka  $d\mathbf{r}$ , zaključujemo da vrijedi

$$\mathbf{F} = -\nabla U.$$

U statičnom električnom polju  $\mathbf{E}$  kojem je pridružen elektrostatski potencijal  $\phi$  (vidi primjer 2.8.2), sila koja djeluje na česticu naboja  $q$  i njena potencijalna energija su  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  i  $U = q\phi$  te vrijedi jednakost

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

koja nam omogućuje računanje električnog polja iz potencijala.

**Primjer 2.8.4:** Električno polje na osi jednoliko nabijenog tankog prstena (2)

U primjeru 1.3.5 izračunali smo električno polje na osi prstena polumjera  $R$  i ukupnog naboja  $q$  izravnom integracijom elemenata električnog polja. Ovdje ćemo isti rezultat dobiti na računski jednostavniji način najprije računajući elektrostatski potencijal.

Uzet ćemo da prsten leži u ravnini  $z = 0$  sa središtem u ishodištu ( $z$ -os se podudara sa osi prstena). Na osnovu simetrije problema zaključujemo da električno polje na  $z$ -osi može imati samo  $z$ -komponentu, a to znači da je u točkama na  $z$ -osi dovoljno odrediti ovisnost potencijala o  $z$ -koordinati. S obzirom da se sav naboj prstena nalazi na jednakoj udaljenosti od odabrane točke na  $z$ -osi, elektrostatski potencijal možemo izravno napisati kao

$$\phi[z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Korištenjem  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  i jednakosti (2.12), kao  $z$ -komponentu električnog polja dobivamo

$$E_z[z] = -\frac{\partial}{\partial z}\phi[z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

## 2.9 Operator nabra, Laplaceov operator i pregled općih identiteta

**Vektorski diferencijalni operator nabra** u pravokutnim koordinatama možemo napisati u obliku

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.27)$$

Uloga koju  $\nabla$  ima u nekom matematičkom izrazu (gradijent skalarnog polja, divergencija ili rotacija vektorskog polja) mora se iščitati iz konteksta.

**Druga derivacija polja (Laplaceov operator):** Operator druge derivacije u trodimenzionalnom prostoru zovemo Laplaceovim operatorom ili laplasijanom te koristimo simbol  $\nabla^2$ . U pravokutnim koordinatama, Laplaceov operator ima oblik

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.28)$$

a može djelovati na skalarna i na vektorska polja. Djelovanje Laplaceovog operatora na skalarno polje  $\phi$  daje

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \quad (2.29)$$

dok djelovanje Laplaceovog operatora na vektorsko polje  $\mathbf{A}$  daje

$$\nabla^2\mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y) \hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.30)$$

**Opći identiteti:** Za općenita vektorska polja  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{b}$  te za skalarno polje  $\phi$  vrijede jednakosti:



$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (2.32)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (2.34)$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{a}) = \nabla \phi \times \mathbf{a} + \phi \nabla \times \mathbf{a} \quad (2.35)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (2.37)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad (2.38)$$

## 3 Maxwellove jednadžbe i zakoni elektromagnetizma

### 3.1 Maxwellove jednadžbe i očuvanje električnog naboja

**Maxwellove jednadžbe** su četiri vezane linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe u kojima se pojavljuju prostorne i vremenske derivacije električnog polja  $\mathbf{E}$  i magnetskog polja  $\mathbf{B}$ , volumna gustoća električnog naboja  $\rho$  i gustoća električne struje  $\mathbf{J}$  koje smatramo izvorima električnog i magnetskog polja te izmjerene prirodne konstante  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$  koje zovemo električnom i magnetskom konstantom. Maxwellove jednadžbe moguće je napisati u obliku

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Maxwellove jednadžbe usklađene su sa načelima specijalne teorije relativnosti te vrijede u svim okolnostima osim u situacijama u kojima kvantna svojstva materije i zračenja dolaze do izražaja.

Zbog njihove važnosti, Maxwellove jednadžbe ovdje iskazujemo i riječima, a preporuča se naučiti ih na pamet:

- Divergencija električnog polja jednaka je gustoći naboja podijeljenoj s električnom konstantom.
- Divergencija magnetskog polja jednaka je nuli.
- Rotacija električnog polja jednaka je negativnoj derivaciji magnetskog polja po vremenu.
- Rotacija magnetskog polja jednaka je zbroju gustoće struje pomnožene magnetskom konstantom i derivacije električnog polja po vremenu pomnožene magnetskom konstantom i električnom konstantom.

Prema redoslijedu kojim su Maxwellove jednadžbe ovdje navedene možemo ih zvati prvom, drugom, trećom i četvrtom Maxwellovom jednadžbom, ali valja upozoriti da mnogi poznati udžbenici (npr. Feynmann, Griffiths) koriste drugačiji redoslijed.

#### Primjer 3.1.1: Zakon očuvanja električnog naboja

Iz Maxwellovih jednadžbi moguće je izvesti jednadžbu kontinuiteta električnog naboja (vidi primjer 2.6.2), što znači da je u njima sadržan zakon očuvanja električnog naboja (temeljni zakon prirode).

Polazimo od divergencije električne struje koju raspisujemo korištenjem (3.4),

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E})$$

S obzirom da je divergencija rotacije svakog vektorskog polja jednaka nuli (opći identitet (2.32)), prvi član na desnoj strani dobivenog izraza jednak je nuli. Korištenjem (3.1), drugi član gornjeg izraza prepoznamo kao negativnu vremensku derivaciju gustoće električnog naboja. Time smo

dobili

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.5)$$

što je jednadžba kontinuiteta električnog naboja.

### 3.2 Gaussovi zakoni za električno i magnetsko polje

**Gaussov zakon za električno polje:** Tok  $\Phi_E$  električnog polja kroz bilo koju zatvorenu plohu jednak je električnom naboju  $q$  sadržanom unutar te plohe podijeljenom s električnom konstantom  $\epsilon_0$ ,

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q. \quad (3.6)$$

Gaussov zakon za električno polje ponekad se još naziva integralnim oblikom Maxwellove jednadžbe (3.1). Možemo ga izvesti integracijom (3.1) po volumenu,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV, \quad (3.7)$$

te Korištenjem Gaussovog teorema (2.17). Integral po volumenu  $V$  s lijeve strane pretvaramo integral električnog polja po zatvorenoj plohi  $\partial V$ , a integral po  $V$  s desne strane prepoznavamo kao naboj sadržan u tom volumenu,

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV, \quad (3.8)$$

što je uz oznake  $\Phi_E = \oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  i  $q = \int_V \rho \, dV$  jednakost (3.6).

#### Primjer 3.2.1: Električno polje nabijene čestice (Gaussov zakon)

Primjenom Gaussovog zakona za električno polje odredit ćemo jakost električnog polja na udaljenosti  $r$  od naboja  $q$ , pri čemu očekujemo od ranije poznati rezultat (1.17).

Kao zatvorenu plohu odabiremo sferu polumjera  $r$ , a česticu naboja  $q$  smještamo u središte te sfere. Zbog prostorne simetrije fizičke situacije koju razmatramo očekujemo da u točkama sfere električno polje mora biti okomito na sferu. Naime, kada bismo dopustili mogućnost da polje u nekoj točki sfere ima tzv. tangencijalnu komponentu, tj. komponentu koja leži u tangencijalnoj ravnini sfere u toj točki, susreli bismo problem da fizički sustav ne sadrži niti jedno svojstvo na osnovi kojega bismo mogli odrediti smjer tangencijalne komponente polja u toj ravnini. Slijedi da tangencijalna komponenta električnog polja mora biti nulvektor, odnosno da polje ima isključivo komponentu koja je okomita na sferu i koju zovemo radijalnom komponentom  $E_r$ . Zbog simetrije također očekujemo da električno polje u svim točkama sfere ima isti iznos (jakost), jer ni ovdje sustav ne posjeduje svojstvo na osnovi kojeg bi se moglo odrediti u kojim točkama ravnine bi radijalna komponenta polja bila veća ili manja nego u nekim drugim točkama.

S obzirom da električno polje svugdje na sferi ima istu radijalnu komponentu, tok polja kroz sferu umnožak je radijalne komponente i površine sfere, a prema Gaussovom zakonu za električno polje taj tok, jednak je naboju  $q$  sadržanom unutar sfere podijeljenom s  $\epsilon_0$ ,

$$\Phi_E = E_r 4r^2 \pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Slijedi

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2},$$

što je u skladu s od ranije poznatim rezultatom (1.17).

**Primjer 3.2.2:** *Električno polje jednoliko nabijenog pravca*

Primjenom Gaussovog zakona izračunat ćemo jakost električnog polja na udaljenosti  $s$  od pravca nabijenog linijskom gustoćom naboja  $\lambda$ . Očekujemo rezultat iz primjera 1.3.4 gdje smo isto polje izračunali izravnom integracijom.

Kao zatvorenu plohu uzimamo plašt valjka (cilindar) duljine  $a$  i polumjera  $s$  i njegove dvije baze, a postavljamo ga tako da os valjka leži na nabijenom pravcu. Zbog simetrije polje može imati isključivo radijalnu komponentu. Tok polja kroz baze valjka jednak je nuli, a tok polja kroz plašt jednak je umnošku jakosti polja  $E$  i površine plašta,

$$\Phi_E = E 2s\pi a.$$

Prema Gaussovom zakonu za električno polje, tok  $\Phi_E$  jednak naboju  $\lambda a$  unutar plohe podijeljenom s  $\epsilon_0$ . Slijedi izraz za jakost polja

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{s},$$

koji se podudara s očekivanim rezultatom (vidi primjer 1.3.4).

**Primjer 3.2.3:** *Električno polje jednoliko nabijene ravnine*

Gausovim zakonom ćemo odrediti jakost električnog polja pored ravnine s površinskom gustoćom naboja  $\sigma$ , a očekujemo rezultat iz primjera (1.3.6).

Zatvorena ploha koju odabiremo sastoji se od plašta valjka (cilindra) i njegovih dviju baza, a postavljamo ju tako da su baze paralelne nabijenoj ravnini i da se nalaze svaka sa svoje strane nalaze na jednakoj udaljenosti od ravnine. Zbog simetrije očekujemo da će polje biti okomito na plohu i suprotnih smjerova s njenih dviju strana. Tok polja kroz plašt valjka jednak je nuli, a tok kroz dvije baze je

$$\Phi_E = 2ES,$$

gdje je  $S$  površina (jedne) baze, a s obzirom da unutar valjka imamo naboj  $\sigma S$ , Gausovim zakonom dobivamo  $2ES = \sigma S/\epsilon_0$  odnosno

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

što je očekivani rezultat.

*Napomena:* Ako se radi o jednoliko nabijenoj površini vodiča, s obzirom na to da u unutrašnjosti vodiča električno polje iščezava, tok električnog polja različit od nule imamo samo na onoj bazi valjka koja se nalazi izvan vodiča. Tada izraz za tok polja glasi  $\Phi_E = ES$  te dobivamo  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Takvu situaciju imamo, na primjer, među paralelnim pločama kondenzatora.

**Gaussov zakon za magnetsko polje:** Tok  $\Phi_B$  magnetskog polja kroz svaku zatvorenu plohu jednak je nuli,

$$\Phi_B = 0. \quad (3.9)$$

Gaussov zakon za magnetsko polje može se izvesti integracijom Maxwellove jednadžbe (3.2) po volumenu te primjenom Gaussovog teorema, a ponekad ga se još naziva integralnim oblikom Maxwellove jednadžbe (3.2).

### 3.3 Faradayev zakon elektromagnetske indukcije

**Elektromotorna sila** (engl. *electromotive force*, EMF) veličina je kojom opisujemo jakost djelovanja mehanizama koji pokreću slobodni naboj u gibanje vodljivim žicama (električnim krugovima). Definirana je kao integral elektromagnetske sile po jedinici naboja duž zatvorene krivulje  $\gamma$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.10)$$

Brzina  $\mathbf{v}$  u gornjem izrazu odnosi se na brzinu elementa krivulje  $d\mathbf{r}$ . Mjerna jedinica za elektromotornu silu je  $V$  (volt) ili  $J/C$  (džul po kulonu).

S obzirom da elektromotorna sila po svojoj fizikalnoj dimenziji nije sila, predložen je naziv *elektromotorni napon*, no on za sada nije u raširenoj upotrebi.

Elektromotornom silom opisujemo baterije, nabijene kondenzatore, fotonaponske ćelije, termočlanake, generatore i sve ostale uređaje koji različite oblike energije pretvaraju u gibanje električnog naboja.

**Elektromagnetska indukcija** je nastajanje elektromotorne sile u vodičima izazvano vremenskim promjenama magnetskog polja u prostoru oko vodiča ili gibanjem vodiča u magnetskom polju.

**Faradayev zakon elektromagnetske indukcije:** Elektromotorna sila  $\mathcal{E}$  inducirana u električnom krugu koji ima oblik zatvorene krivulje  $\gamma$  jednaka je negativnoj vremenskoj derivaciji toka  $\Phi_B$  magnetskog polja kroz bilo koju plohu  $S$  omeđenu krivuljom  $\gamma$  (vrijedi  $\gamma = \partial S$ ),

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\Phi_B. \quad (3.11)$$

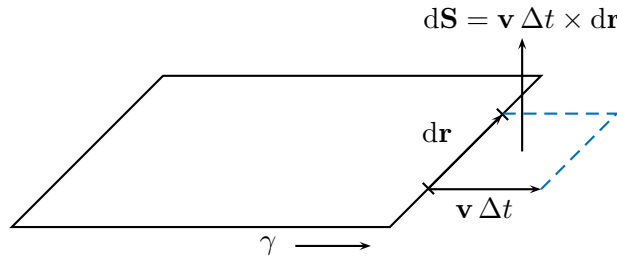
Faradayev zakon povezuje induciranu elektromotornu silu i vremensku derivaciju toka magnetskog polja kroz plohu omeđenu zatvorenim krivuljom neovisno o tome je li do promjene toka magnetskog polja u vremenu došlo zbog promjene magnetskog polja u vremenu, ili zbog gibanja dijelova krivulje, ili oboje istovremeno.

U slučaju u kojem krivulja  $\gamma$  miruje, a prisutna je vremenska promjena magnetskog polja  $\mathbf{B}$ , Faradayev zakon slijedi iz Maxwellove jednadžbe (3.3). Polazimo od definicije (3.10) i koristimo Stokesov teorem kako bismo integral električnog polja po mirnoj zatvorenoj krivulji  $\gamma$  pretvorili u integral rotacije tog polja po plohi omeđenoj s  $\gamma$ . Zatim korištenjem (3.3) rotaciju električnog polja zamijenjujemo negativnom vremenskom derivacijom magnetskog polja, izlučujemo operator derivacije po vremenu ispred integrala te čitav izraz prepoznavamo kao negativnu vremensku derivaciju toka magnetskog

polja kroz plohu omeđenu s  $\gamma$ ,

$$\mathcal{E} = \oint_{\gamma=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \Phi_B. \quad (3.12)$$

Ako je magnetsko polje stalno u vremenu, a dijelovi krivulje  $\gamma$  se gibaju, Faradayev zakon dobivamo iz magnetskog dijela izraza (3.10). Slika prikazuje zatvorenu krivulju  $\gamma$  i njen element  $d\mathbf{r}$  čija je brzina  $\mathbf{v}$ . U intervalu vremena  $\Delta t$  element krivulje  $d\mathbf{r}$  čini pomak  $\mathbf{v} \Delta t$ , a time nastaje element plohe  $d\mathbf{S} = \mathbf{v} \Delta t \times d\mathbf{r}$ .



Elektromotornu sila induciranu duž čitave krivulje  $\gamma$  možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \oint_{\gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t} \oint_{\gamma} (d\mathbf{r} \times \mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{B} \\ &= -\frac{1}{\Delta t} \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \Delta t \times d\mathbf{r}) = -\frac{1}{\Delta t} \oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{d}{dt} \Phi_B. \end{aligned} \quad (3.13)$$

U gornjem računu najprije koristimo opći identitet  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ . Zatim brzinu  $\mathbf{v}$  elementa krivulje  $d\mathbf{r}$  množimo trajanjem intervala vremena  $\Delta t$  čime dobivamo pomak elementa krivulje  $\mathbf{v} \Delta t$ , a kako bi vrijednost čitavog izraza ostala nepromijenjena, ispred integrala uvodimo faktor  $1/\Delta t$ . Pri prelasku u donji red izraz pišemo u obliku u kojem se pojavljuje vektorski produkt  $\mathbf{v} \Delta t \times d\mathbf{r}$  koji prepoznamo kao element plohe  $d\mathbf{S}$  nastao gibanjem elementa krivulje (vidi gornju sliku). Time dobivamo integral koji se provodi duž krivulje  $\gamma$ , a koji predstavlja tok magnetskog polja kroz plohu nastalu gibanjem krivulje  $\gamma$  u vremenskom intervalu  $\Delta t$ . Taj integral, s obzirom da je magnetsko polje stalno u vremenu, ujedno predstavlja promjenu  $\Delta \Phi_B$  toka magnetskog polja kroz čitavu plohu omeđenu krivuljom  $\gamma$  promjenjivog oblika, a koja je nastupila u tom intervalu. Konačno, s obzirom da se ispred integrala nalazi faktor  $1/\Delta t$ , čitav izraz prepoznamo kao derivaciju toka magnetskog polja  $\Phi_B$  po vremenu.

**Primjer 3.3.1:** *Elektromagnetska indukcija u promjenjivom magnetskom polju*

Odredit ćemo elektromotornu silu induciranu u mirnom pravokutniku čije su stranice  $a$  i  $b$ , a izmjenična struja jakosti

$$I = I_0 \cos \omega t$$

teče u ravnini pravokutnika duž pravca paralelnog sa stranicom duljine  $a$  na udaljenosti  $d$  (geometrija iz primjera 2.3.4).

Pretpostavit ćemo da je promjena struje  $I$  u vremenu dovoljno spora da u svakom trenutku možemo koristiti izraz za tok magnetskog polja kroz pravokutnik koji smo izveli u primjeru 2.3.4. Uvrštavanjem izmjenične struje u taj izraz dobivamo

$$\Phi_B[t] = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln \left[ \frac{d+b}{d} \right] \cos \omega t,$$

a prema Faradayevom zakonu elektromagnetske indukcije za elektromotornu silu dobivamo

$$\mathcal{E}[t] = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi[t] = \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{\mu_0 I_0 a \omega}{2\pi} \ln \left[ \frac{d+b}{d} \right].$$

Za  $I_0 = 1 \text{ A}$ ,  $\omega = 2\pi \times 50 \text{ rad s}^{-1}$  i  $a = b = d = 10 \text{ cm}$ , dobili bismo  $\mathcal{E}_0 \simeq 4.4 \text{ mV}$ .

### Primjer 3.3.2: Elektromagnetska indukcija u stalnom magnetskom polju

Odredit ćemo elektromotornu silu induciranu u pravokutniku čije su stranice  $a$  i  $b$ , a stalna struja jakosti  $I$  teče u ravnini pravokutnika duž pravca paralelnog sa stranicom duljine  $a$ . Pretpostavit ćemo da se pravokutnik udaljava od osi stalnom brzinom iznosa  $v$ , odnosno da se u trenutku  $t > 0$  stranica duljine  $a$  nalazi na udaljenosti  $d = vt$  od pravca kojim teče struja (geometrija slična onoj iz primjera 2.3.4).

Prema izrazu koji smo izveli u primjeru 2.3.4, tok magnetskog polja kroz pravokutnik u trenutku  $t$  je

$$\Phi_B[t] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left[ \frac{d[t] + b}{d[t]} \right] = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left[ \frac{vt + b}{vt} \right],$$

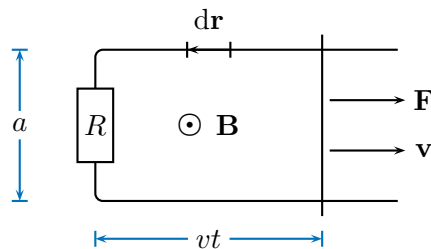
a prema Faradayevom zakonu elektromotorna sila je

$$\mathcal{E}[t] = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi[t] = \dots = \frac{\mu_0 I a b}{2\pi} \frac{1}{(vt + b)t}.$$

Uočavamo da s vremenom, odnosno s udaljenošću, iznos inducirane elektromotorne sile teži u nulu.

### Primjer 3.3.3: Pretvorba mehaničkog rada u toplinu električnim strojem

Razmotrit ćemo načela rada idealiziranog stroja koji pretvara mehanički rad najprije u električnu, a zatim u toplinsku energiju. Stroj se sastoji od dviju nepomičnih vodljivih tračnica razmaknutih za  $a$  i povezanih električnim otpornikom otpora  $R$  te od pomičnog vodljivog štapa položenog okomito na tračnice. Stroj se nalazi u homogenom magnetskom polju  $\mathbf{B}$  koje je okomito na ravninu stroja i usmjereno je iz ravnine crteža prema gledatelju.



Djelujući na štap silom  $\mathbf{F}$ , paralelno ga pomičemo stalnom brzinom  $\mathbf{v}$  svo vrijeme osiguravajući električni kontakt štapa s obje tračnice. U pravokutniku koji zatvaraju otpornik, tračnice i pomični štap dolazi do elektromagnetske indukcije, do toka električne struje, te do zagrijavanja otpornika. Pokazat ćemo da je snaga kojom otpornik razvija toplinu jednaka mehaničkoj snazi kojom djelujemo pri pomicanju štapa.

Orijentiramo li pravokutnik kao što pokazuje element krivulje  $dr$  na slici, tok  $\Phi_B$  magnetskog

polja kroz pravokutnik je pozitivan, a može se izraziti kao produkt površine pravolutnika,  $S = avt$ , i iznosa polja  $B$ ,

$$\Phi_B = SB = avtB.$$

Inducirana elektromotorna sila  $\mathcal{E}$  je prema Faradayevu zakonu

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_B = -avB,$$

gdje negativan predznak znači da ona djeluje u suprotnom smjeru u odnosu na orijentaciju krivulje. S obzirom da se u električnom krugu nalazi otpornik otpora  $R$ , dok otpor tračnica i šipke smatramo zanemarivim, inducirana električna struja  $I$  koja teče krugom je, prema Ohmovom zakonu, razmjerna induciranoj elektromotornoj sili (naponu), a obrnuto je razmjerna otporu,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{avB}{R}.$$

Snaga  $P$  kojom otpornik pretvara električnu energiju u toplinu je umnožak napona na koji je priključen i struje koja kroz njega teče,

$$P = \mathcal{E}I = \frac{a^2v^2B^2}{R}.$$

S obzirom da štapom teče struja  $I$  i da se on nalazi u magnetskom polju  $\mathbf{B}$  koje je okomito na štap, na njega djeluje sila usmjerena prema otporniku čiji je iznos

$$F = B Ia = \frac{a^2vB^2}{R},$$

(koristimo izraz iz primjera ??), a to znači da silom istog iznosa moramo djelovati u suprotnom smjeru kako bi se štap gibao stalnom brzinom. Snaga kojom moramo djelovati želimo li da se štap giba brzinom iznosa  $v$  je

$$P = Fv = \frac{a^2v^2B^2}{R},$$

što se podudara sa snagom kojom otpornik stvara toplinu i govori o očuvanju energije u ovom idealiziranom stroju.

### Lenzovo pravilo:

## 3.4 Ampère–Maxwellov zakon

**Ampère–Maxwellov zakon:** Integral magnetskog polja duž zatvorene krivulje  $\gamma$  koja omeđuje plohu  $S$  jednak je zbroju električne struje  $I$  koja prolazi plohom  $S$  pomnožene s  $\mu_0$  i vremenske derivacije toka  $\Phi_E$  električnog polja kroz  $S$  pomnožene s  $\mu_0\epsilon_0$ ,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_E. \quad (3.14)$$

U tzv. Ampèreovom zakonu koji je otkriven prije Maxwellove formulacije potpunih jednadžbi elektromagnetizma nedostaje drugi član na desnoj strani jednadžbe (3.14), zbog čega taj zakon



ne vrijedi općenito. Drugi član desne strane (3.14) ponekad se još naziva Maxwellovim članom ili Maxwellovim dodatkom Ampèreovom zakonu.

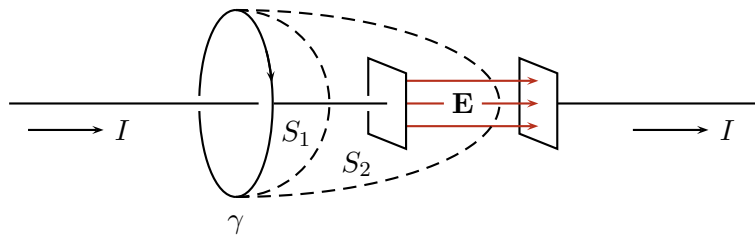
Ampère–Maxwellov zakon može se izvesti integracijom Maxwellove jednadžbe (3.4) po otvorenoj plohi te ga smatramo integralnim oblikom te jednadžbe. Integracijom (3.4) po otvorenoj plohi  $S$  imamo

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.15)$$

Primjenom Stokesovog teorema integral s lijeve strane pretvaramo u integral po zatvorenoj krivulji  $\gamma = \partial S$ , a integrale s desne strane prepoznavamo kao struju  $I$  i tok  $\Phi_E$  električnog polja kroz  $S$ , čime dobivamo (3.14).

### Primjer 3.4.1: Ampère–Maxwellov zakon i nepotpunost Ampèreovog zakona

Slika prikazuje ploče kondenzatora i vodiče kojima teče stalna struja  $I$  koja nabija kondenzator. Oko jednog od vodiča imamo orijentiranu zatvorenu krivulju  $\gamma$  te dvije različite otvorene plohe koje ona omeđuje. Ploha  $S_1$  presijeca jedan od vodiča, a nalazi se u području u kojem je iznos električnog polja kondenzatora zanemariv. Ploha  $S_2$  ne presijeca niti jedan od vodiča, a prolazi područjem između ploča kondenzatora u kojem električno polje ima značajnu vrijednost. (Zbog jednostavnosti, električno polje u području među pločama smatramo homogenim, dok električno polje izvan tog područja smatramo jednakim nuli.)



Izračunat ćemo integral magnetskog polja duž krivulje  $\gamma$  primjenom Ampère–Maxwellovog zakona, najprije koristeći plohu  $S_1$ , a zatim koristeći plohu  $S_2$ . U oba slučaja očekujemo isti rezultat.

- Koristimo li plohu  $S_1$ , prvi član na desnoj strani (3.14) različit je od nule jer plohom  $S_1$  prolazi struja  $I$ , dok je drugi član jednak nuli jer električno polje u području u kojem se nalazi  $S_1$  smatramo zanemarivim. Zaključujemo da vrijedi

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I.$$

- Koristimo li plohu  $S_2$ , prvi član na desnoj strani (3.14) jednak je nuli jer električni naboj ne prolazi plohom  $S_2$ . Drugi član na desnoj strani (3.14) različit je od nule jer se ploha  $S_2$  jednim svojim dijelom nalazi u području u kojem je prisutno električno polje čija se iznos punjenjem kondenzatora mijenja u vremenu, a time se u vremenu mijenja i tok  $\Phi_E$  električnog polja kroz  $S_2$ . Uzmemo li da je u  $t = 0$  naboj na pločama kondenzatora bio jednak nuli, naboj lijeve ploče na slici možemo izraziti s  $q = It$  (naboj desne ploče ima suprotan predznak), a to znači da je površinska gustoća naboja s unutarnje strane lijeve ploče kondenzatora

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{It}{A},$$

gdje smo s  $A$  označili površinu ploče. Iznos električnog polja u području među pločama kondenzatora tada je

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{It}{\epsilon_0 A},$$

(vidi primjer 3.2.3), a tok polja kroz plohu  $S_2$  je

$$\Phi_E = AE = \frac{It}{\epsilon_0}.$$

Drugi član na desnoj strani (3.14) daje

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E = \mu_0 I,$$

što je jednako vrijednosti koju je u slučaju korištenja plohe  $S_1$  imao prvi član desne strane (3.14).

Pokazali smo da je Ampère–Maxwellov zakon u oba slučaja dao isti rezultat. Nepotpuni Ampèreov zakon dao bi ispravan rezultat u slučaju korištenja plohe  $S_1$  kojom teče struja, ali ne i u slučaju korištenja plohe  $S_2$  kojom ne teče struja.

### 3.5 Energija elektromagnetskog polja (Poyntingov teorem)

Razmatranjem snage kojom elektromagnetsko polje djeluje na električki nabijenu materiju i korištenjem načela očuvanja energije može se pronaći izraze za volumnu gustoću energije i za gustoću toka energije elektromagnetskog polja.

Polazimo od pretpostavke da se ukupna energija  $U$  sadržana u volumenu  $V$ , odn. unutar zatvorene plohe  $S = \partial V$ , sastoji od mehaničke energije materije i od energije elektromagnetskog polja. Označimo li s  $u_{\text{meh}}$  volumnu gustoću mehaničke energije i s  $u_{\text{em}}$  volumnu gustoću energije elektromagnetskog polja, energiju  $U$  možemo izraziti kao

$$U = \int_V (u_{\text{meh}} + u_{\text{em}}) dV. \quad (3.16)$$

Na osnovu načela očuvanja energije očekujemo da se energija  $U$  sadržana unutar zatvorene plohe  $S$  može promijeniti ako dio energije elektromagnetskog polja napusti prostor omeđen s  $S$  ili ako neka količina energije elektromagnetskog polja iz vanjskog prostora uđe u prostor omeđen s  $S$ . Označimo li s  $\mathcal{S}$  gustoću toka energije elektromagnetskog polja, uvjet očuvanja energije možemo izraziti s

$$\frac{d}{dt}U = - \oint_S \mathcal{S} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.17)$$

gdje je negativan predznak prisutan jer pozitivnom toku energije kroz zatvorenu plohu  $S$  odgovara smanjenje energije  $U$  sadržane unutar  $S$ . Lijevu stranu gornje jednakosti možemo izraziti korištenjem integrala (3.16), a desnu stranu korištenjem teorema o divergenciji možemo izraziti integralom po volumenu,

$$\int_V \frac{d}{dt} (u_{\text{meh}} + u_{\text{em}}) dV = - \int_V \nabla \cdot \mathcal{S} dV. \quad (3.18)$$

Konačno, s obzirom da gornja jednakost vrijedi za bilo koje područje prostora, zaključujemo da mora vrijediti

$$\frac{d}{dt} (u_{\text{meh}} + u_{\text{em}}) = -\nabla \cdot \mathcal{S}. \quad (3.19)$$

Gornja jednadžba ima oblik tzv. jednadžbe kontinuiteta, a odražava načelo očuvanja energije za koju smo pretpostavili da se sastoji od mehaničke energije i od energije elektromagnetskog polja. (Jednadžbu kontinuiteta koja odražava načelo očuvanja električnog naboja susreli smo u primjerima 2.6.2 i 3.1.1.) Izrazi za  $u_{\text{em}}$  i  $\mathcal{S}$  dani su Poyntingovim teoremom.

**Poyntingov teorem:** Volumna gustoća energije elektromagnetskog polja može se izraziti kao

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (3.20)$$

a gustoća toka energije elektromagnetskog polja može se izraziti vektorskim poljem

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.21)$$

koje zovemo *Poyntingovim poljem*.

Izraze (3.20) i (3.21) izvest ćemo razmatranjem elementa snage  $dP$  kojom elektromagnetsko polje djeluje na nabijenu materiju unutar elementa volumena  $dV$ . Element snage  $dP$  možemo izraziti kao

$$dP = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \rho dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (3.22)$$

gdje smo najprije element sile  $d\mathbf{F}$  kojom elektromagnetsko polje djeluje na element naboja  $dq = \rho dV$  i čija je brzina  $\mathbf{v}$  izrazili korištenjem izraza za Lorentzovu silu, zatim smo uočili da vrijedi  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ , a u posljednjem koraku smo produkt volumne gustoće naboja  $\rho$  i njegove brzine  $\mathbf{v}$  prepoznali kao gustoću struje,  $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ . Podijelimo li  $dP$  s  $dV$  dobivamo volumnu gustoću snage kojom elektromagnetsko polje djeluje na materiju, a s obzirom da obavljani rad nad materijom mora biti jednak promjeni mehaničke energije materije, volumna gustoća snage  $dP/dV$  mora biti jednaka vremenskoj derivaciji volumne gustoće mehaničke energije. To znači da korištenjem (3.22) možemo napisati

$$\frac{d}{dt}u_{\text{meh}} = \frac{dP}{dV} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.23)$$

a korištenjem Maxwellove jednadžbe (3.4) imamo

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.24)$$

Korištenjem općeg identiteta (2.37) i Maxwellove jednadžbe (3.3), skalarni produkt  $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$  u gornjem izrazu možemo napisati u obliku

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.25)$$

$$= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (3.26)$$

Uvrštavanjem (3.24) i (3.26) u (3.23) te korištenjem općeg identiteta  $\mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{A} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}A^2$  slijedi

$$\frac{d}{dt}u_{\text{meh}} = -\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.27)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right). \quad (3.28)$$

Izraze u okruglim zagradama prepoznajemo kao volumnu gustoću energije elektromagnetskog polja (3.20) i Poyntingovo polje (3.21), a čitavu jednadžbu prepoznajemo kao jednadžbu kontinuiteta (3.19). Time smo, korištenjem načela očuvanja energije i računanjem snage kojom elektromagnetsko polje djeluje na materiju, izveli izraze (3.20) i (3.21).

### Primjer 3.5.1: Energija kondenzatora

Poznati izrazi za energiju  $U$  i kapacitet  $C$  kondenzatora s paralelnim pločama površine  $S$  razmaknutim za  $d$  među kojima je zrak glase

$$U = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2, \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d},$$

gdje je  $\Delta\phi$  je razlika elektrostatskog potencijala među pločama kondenzatora. Pokazat ćemo je energija polja kakvu predviđa Poyntingov teorem u skladu s tim izrazima.

Pretpostavit ćemo da je u području među pločama kondenzatora električno polje homogeno s iznosom  $E = \Delta\phi/d$  i da je izvan tog područja ono jednako nuli. Energija polja prema Poyntingovom teoremu tada je

$$U = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\Delta\phi}{d} \right)^2 Sd = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\Delta\phi)^2 \frac{S}{d} = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2,$$

što je očekivana vrijednost. (U gornjem smo računu proveli integraciju po području među pločama čiji je volumen  $V = Sd$ .)

**Primjer 3.5.2:** *Energija dugačke zavojnice*

## 4 Elektromagnetski val u vakuumu

### 4.1 Maxwellove jednadžbe u vakuumu

U okviru elektromagnetizma, vakuumom smatramo stanje u prostoru u kojem *nije* prisutna materija, ali *jest* prisutno elektromagnetsko polje. Prema tome, volumna gustoća električnog naboja u vakuumu jednaka je nuli,  $\rho = 0$ , a isto vrijedi i za gustoću električne struje,  $\mathbf{J} = 0$ . Time Maxwellove jednadžbe (3.1–3.4) u vakuumu poprimaju jednostavniji oblik i glase

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

a po definiciji je

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \quad (4.5)$$

brzina svjetlosti u vakuumu.

Maxwellove jednadžbe u vakuumu su linearne homogene diferencijalne jednadžbe zbog čega za njih vrijedi načelo superpozicije rješenja. To znači da ako su polja  $\mathbf{E}_1$  i  $\mathbf{B}_1$  rješenja jednadžbi, onda su polja  $\lambda \mathbf{E}_1$  i  $\lambda \mathbf{B}_1$ , gdje je  $\lambda$  konstanta, također njihova rješenja. Nadalje ako su  $\mathbf{E}_2$  i  $\mathbf{B}_2$  njihova rješenja, onda je i takozvana superpozicija  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$  i  $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$  također rješenje tih jednadžbi.

### 4.2 Valne jednadžbe za električno i za magnetsko polje

Najjednostavnija valna jednadžba poznata iz mehanike ima oblik

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi[z, t] = 0, \quad (4.6)$$

gdje funkcija  $\phi[z, t]$  opisuje otklon materije od njenog ravnotežnog položaja, a  $v$  je konstanta. Njeno rješenje je oblika

$$\phi[z, t] = f[x \pm vt], \quad (4.7)$$

gdje je  $f$  bilo koja funkcija jedne varijable. To rješenje opisuje poremećaj koji, ovisno o odabiru predznaka u argumentu funkcije  $f$ , putuje u negativnom ili u pozitivnom smjeru prostorne  $z$ -osi brzinom iznosa  $v$ . Valne jednadžbe koja su po obliku slične jednadžbi (4.6) susrećemo i u elektromagnetizmu gdje one opisuju ponašanje električnog i magnetskog polja u vakuumu.

**Valne jednadžbe za električno i magnetsko polje u vakuumu:** Ako električno polje  $\mathbf{E}$  i magnetsko polje  $\mathbf{B}$  zadovoljavaju Maxwellove jednadžbe u vakuumu (4.1)–(4.4), onda ta polja zadovoljavaju i valne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad (4.8)$$

gdje je  $c = 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$  brzina svjetlosti u vakuumu. Jednadžbe (4.8) govore nam da poremećaji ravnotežnog (statičnog) stanja elektromagnetskog polja u vakuumu putuju kroz prostor brzinom svjetlosti  $c$ .

*Upozorenje:* Rješenje valnih jednadžbi (4.8) nije nužno rješenje Maxwellovih jednadžbi (4.1)–(4.4).

Valne jednadžbe (4.8) možemo izvesti iz Maxwellovih jednadžbi u vakuumu.

Najprije ćemo izvesti valnu jednadžbu za električno polje  $\mathbf{E}$ . Polazimo od laplasijana električnog polja koji, korištenjem općeg identiteta (2.33), možemo izraziti kao

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (4.9)$$

Divergencija električnog polja u prvom članu desne strane u vakuumu jednaka je nuli (Maxwellova jednadžba 4.1), a rotaciju električnog polja u drugom članu možemo, korištenjem Maxwellove jednadžbe (4.3), izraziti negativnom vremenskom derivacijom magnetskog polja. Time dobivamo

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (4.10)$$

gdje smo u posljednjem koraku zamijenili redoslijed djelovanja operatora parcijalne derivacije po vremenu i operatora rotacije vektorskog polja. Rotaciju magnetskog polja sada možemo, korištenjem Maxwellove jednadžbe (4.4), izraziti vremenskom derivacijom električnog polja,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (4.11)$$

što je uz  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$  valna jednadžba za  $\mathbf{E}$  iz (4.8).

Sličnim postupkom dobivamo i valnu jednadžbu za magnetsko polje  $\mathbf{B}$ . Polazimo od laplasijana magnetskog polja (opći identitet 2.33),

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (4.12)$$

Prepoznamo da je divergencija magnetskog polja jednaka nuli (Maxwellova jednadžba 4.2), a rotaciju magnetskog polja izražavamo vremenskom derivacijom električnog polja (Maxwellova jednadžba 4.4). Nakon toga imamo

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla \times \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (4.13)$$

gdje smo, nakon zamjene redoslijeda djelovanja diferencijalnih operatora, rotaciju električnog polja izrazili vremenskom derivacijom magnetskog polja (Maxwellova jednadžba 4.3). Uz  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$ , to je valna jednadžba za  $\mathbf{B}$  iz (4.8).

### 4.3 Ravni linearno polarizirani harmonijski val

Elektromagnetski val smatramo ravnim ako u odabranom trenutku vremena u svim točkama odabrane ravnine koja je okomita na smjer širenja vala električno i magnetsko polje imaju iste vrijednosti (iznose i smjerove). Val smatramo harmonijskim valom ako polja u vremenu harmonijski titraju nekom kutnom frekvencijom  $\omega$ . Ravni harmonijski elektromagnetski val najjednostavnije je, a ujedno i najvažnije, (netrivijalno) rješenje valnih jednadžbi (4.8).

**Ravni linearno polarizirani harmonijski elektromagnetski val u vakuumu** koji titra kutnom frekvencijom  $\omega$  i putuje u smjeru određenom tzv. *valnim vektorom*

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} \quad (4.14)$$

( $\hat{\mathbf{k}}$  je jedinični vektor) ima električno polje koje možemo izraziti s

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}, t] = \mathbf{E}_0 \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi], \quad \mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (4.15)$$

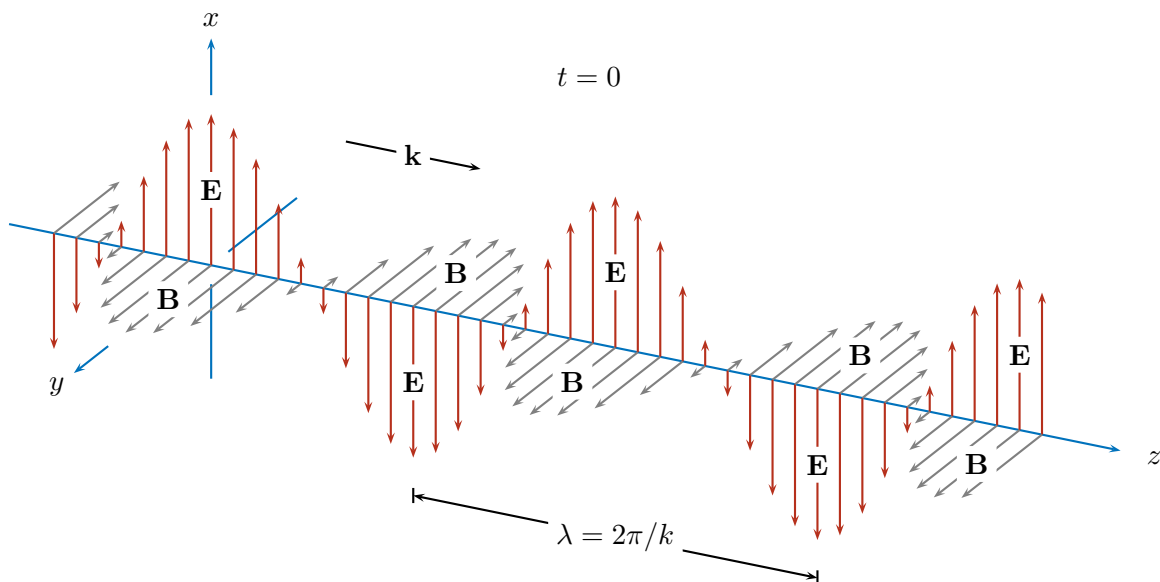
Konstantni vektor  $\mathbf{E}_0$  shvaćamo kao *amplitudu titranja električnog polja* ovog vala, a uvjet  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$  znači da on mora biti okomit na smjer u kojem val putuje. Magnetsko polje elektromagnetskog vala čije električno polje je dato s (4.15) može se izraziti kao

$$\mathbf{B}[\mathbf{r}, t] = \mathbf{B}_0 \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi], \quad \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0, \quad (4.16)$$

gdje je konstantni vektor  $\mathbf{B}_0$  *amplituda titranja magnetskog polja*. Uočavamo da električno i magnetsko polje ovog vala titraju u fazi (imaju jednaku početnu fazu  $\phi$ ) te da su valni vektor  $\mathbf{k}$  i amplitude  $\mathbf{E}_0$  i  $\mathbf{B}_0$  međusobno okomiti vektori.

Za ravni elektromagnetski val opisan gornjim izrazima kažemo da je *linearno polariziran* duž osi na kojoj leži vektor amplitude njegovog *električnog* polja (sama orijentacija duž te osi nema značaj jer odražava slobodu odabira početne faze  $\phi \rightarrow \phi + \pi$ ).

Slika prikazuje električno i magnetsko polje ravnog harmonijskog elektromagnetskog vala koji putuje u pozitivnom smjeru  $z$ -osi i koji je linearno polariziran u  $x$ -smjeru. Vektori električnog (crvena boja) i magnetskog polja (siva boja) prikazani su u točkama  $z$ -osi u trenutku  $t = 0$ .



Vremensku promjenu električnog i magnetskog polja s gornje slike možemo zamisliti kao putovanje (translaciju) nacrtanih vektora stalnom brzinom  $c$  u smjeru valnog vektora  $\mathbf{k}$ . Opažatelj koji miruje u nekoj točki  $z$ -osi u vremenu bi opažao harmonijsko titranje električnog i magnetskog polja kutnom frekvencijom  $\omega = kc$ .



Općenite uvjete  $\mathbf{E}_0 \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$  iz (4.15) i  $\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$  iz (4.16) izvest ćemo korištenjem Maxwellovih jednadžbi u vakuumu (4.1)–(4.4). Krećemo od pretpostavke da električno polje u vakuumu ima oblik

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}, t] = \mathbf{E}_0 \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]. \quad (4.17)$$

Pravokutni koordinatni sustav orijentiramo tako da val putuje u pozitivnom smjeru  $z$ -osi i da  $y$ -komponenta vektora  $\mathbf{E}_0$  bude jednaka nuli. Valni vektor  $\mathbf{k}$  i amplituda  $\mathbf{E}_0$  sada su

$$\mathbf{k} = k_z \hat{\mathbf{z}}, \quad k_z = \frac{\omega}{c}, \quad \mathbf{E}_0 = E_{0x} \hat{\mathbf{x}} + E_{0z} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.18)$$

a električno polje je

$$\mathbf{E}[z, t] = (E_{0x} \hat{\mathbf{x}} + E_{0z} \hat{\mathbf{z}}) \cos[k_z z - \omega t]. \quad (4.19)$$

Divergencija tog polja je

$$\nabla \cdot \mathbf{E}[z, t] = \dots = -E_{0z} k_z \sin[k_z z - \omega t], \quad (4.20)$$

a prema Maxwellovoj jednadžbi (4.1) ona je jednaka nuli, pa zaključujemo da vrijedi  $E_{0z} = 0$ , odn. da je amplituda električnog polja okomita na smjer u kojem val putuje. Amplituda električnog polja je sada  $\mathbf{E}_0 = E_{0x} \hat{\mathbf{x}}$ , a električno polje je

$$\mathbf{E}[z, t] = E_{0x} \cos[k_z z - \omega t] \hat{\mathbf{x}}. \quad (4.21)$$

Rotacija tog polja je

$$\nabla \times \mathbf{E}[z, t] = \dots = -E_{0x} k_z \sin[k_z z - \omega t] \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.22)$$

a prema Maxwellovoj jednadžbi (4.3) ona je jednaka negativnoj vremenskoj derivaciji magnetskog polja. To znači da imamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}[z, t] = E_{0x} k_z \sin[k_z z - \omega t] \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.23)$$

čije je rješenje

$$\mathbf{B}[z, t] = \frac{E_{0x} k_z}{\omega} \cos[k_z z - \omega t] \hat{\mathbf{y}} = \frac{E_{0x}}{c} \cos[k_z z - \omega t] \hat{\mathbf{y}}. \quad (4.24)$$

Lako je provjeriti da amplituda električnog polja  $\mathbf{E}_0 = E_{0x} \hat{\mathbf{x}}$  i amplituda magnetskog polja  $\mathbf{B}_0 = (E_{0x}/c) \hat{\mathbf{y}}$  zadovoljavaju uvjet  $\mathbf{B}_0 = (1/c) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$  iz (4.16).

**Intenzitet ravnog linearno polariziranog harmonijskog vala u vakuumu:** Poyntingov vektor elektromagnetskog vala opsianog izrazima (4.15) i (4.16) je

$$\mathcal{S}[\mathbf{r}, t] = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}[\mathbf{r}, t] \times \mathbf{B}[\mathbf{r}, t] = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi] \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.25)$$

a *intenzitet vala*  $I$  je u vremenu usrednjena vrijednost projekcije Poyntingovog vektora na smjer u kojem val putuje. S obzirom da je srednja vrijednost funkcije  $\cos^2 x$  jednaka  $1/2$ , ovdje imamo

$$I = \langle \mathcal{S} \cdot \hat{\mathbf{k}} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}. \quad (4.26)$$

**Primjer 4.3.1:** Srednja vrijednost Poyntingovog vektora Sunčevog zračenja na Zemlji

Srednju vrijednost Poyntingovog vektora Sunčevog zračenja na udaljenosti od Sunca na kojoj se nalazi Zemlja procijenit ćemo korištenjem astrofizičkih i astronomskih podataka.

Ukupna snaga Sunčevog zračenja poznata je kao *luminozitet Sunca* (engl. *Solar luminosity*) i iznosi  $L_{\odot} = 3.828 \times 10^{26}$  W, a srednja udaljenost Zemlje od Sunca približno je jednaka tzv. astronomskoj jedinici (engl. *Astronomical unit*),  $1 \text{ AU} = 149\,597\,870\,700$  m.

Zamislimo li da se Sunce nalazi u središtu sfere čiji polumjer  $a$  odgovara udaljenosti Zemlja–Sunce, intenzitet  $I$  zračenja na toj sferi možemo izračunati kao omjer ukupne snage  $P$  i površine sfere  $S = 4\pi a^2$ ,

$$I = \frac{P}{4\pi a^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi(1 \text{ AU})^2} = \dots \simeq 1.361 \text{ kW m}^{-2},$$

a to je ujedno i srednja vrijednost Poyntingovog vektora na sferi. Dobivena vrijednost poznata je kao Sunčeva konstanta (engl. *Solar constant*)  $G_{\text{SC}}$ . Sunčevo zračenje sastoji se od valova različitih frekvencija i stanja polarizacije, a Sunčeva konstanta govori o ukupnoj snazi takvog zračenja. Kad bismo, zbog jednostavnosti, pretpostavili da je Sunčevo zračenje ravni linearno polarizirani harmonijski val, amplitudu električnog polja tog vala mogli bismo procijeniti iz jednakosti (4.26). Dobili bismo

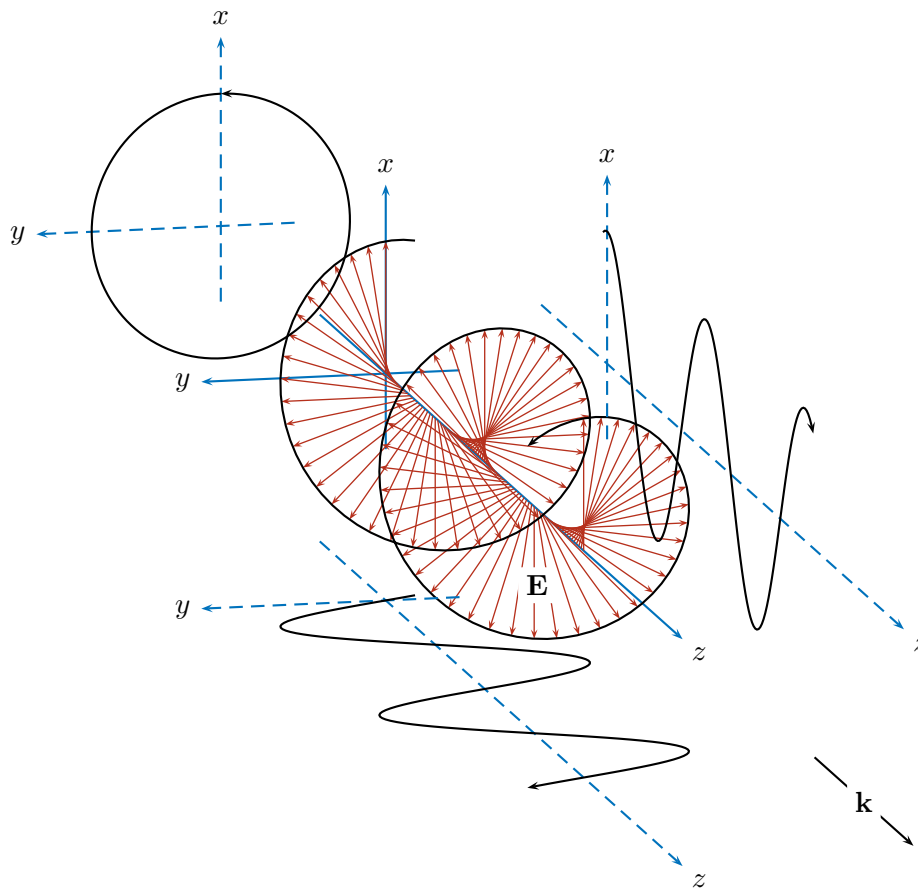
$$E_0 = \sqrt{2\mu_0 c I} = \sqrt{2\mu_0 c G_{\text{SC}}} = \dots \simeq 1.0 \text{ kV m}^{-1},$$

a amplituda magnetskog polja bila bi  $B_0 = E_0/c \simeq 3.4 \times 10^{-6}$  T.

## 4.4 Općenita stanja polarizacije ravnog harmonijskog vala

Općeniti ravni harmonijski val možemo izraziti kao superpoziciju dvaju linearno polariziranih valova s međusobno okomitim smjerovima polarizacije. Slika prikazuje električno polje ravnog harmonijskog vala koji putuje u pozitivnom smjeru  $z$ -osi, a možemo ga shvatiti kao superpoziciju valova čija su električna polja

$$(E_0 \hat{\mathbf{x}}) \cos[kz - \omega t] \quad \text{i} \quad (E_0 \hat{\mathbf{y}}) \sin[kz - \omega t]. \quad (4.27)$$



Vektori crvene boje prikazuju električno polje u točkama na  $z$ -osi u trenutku  $t = 0$ , a crna linija povezuje vrhove tih vektora. Dolje i desno na slici nacrtane su projekcije crne linije na ravninu  $y = 0$  i na ravninu  $x = 0$ . Te projekcije možemo shvatiti kao prikaz električnih polja dvaju linearno polariziranih valova koji superpozicijom tvore rezultantni val prikazan u sredini slike. Projekcija crne linije na ravninu  $z = 0$  (ravninu okomitu na smjer u kojem putuje val) prikazana je gore-lijevo na slici. S obzirom da je ta projekcija kružnica, ovakav val zovemo *kružno polariziranim valom*.

## 5 Valna optika

### 5.1 Brzina svjetlosti u optičkom sredstvu

$$v = \frac{c}{n}$$

$$dt = dr/v = n dr/c$$

$$ds = c dt = n dr$$

### 5.2 Interferencija valova dvaju koherentnih izvora

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(k s_1 - \omega t + \phi_1)} + \mathbf{E}_0 e^{i(k s_2 - \omega t + \phi_2)} \quad (5.1)$$

$$= \mathbf{E}_0 e^{i(k \bar{s} - \omega t + \bar{\phi})} \left( e^{i(k \Delta s/2 + \Delta \phi/2)} + e^{-i(k \Delta s/2 + \Delta \phi/2)} \right) \quad (5.2)$$

$$= 2\mathbf{E}_0 \cos[k \Delta s/2 + \Delta \phi/2] e^{i(k \bar{s} - \omega t + \bar{\phi})} \quad (5.3)$$

gdje je

$$\Delta s = s_1 - s_2, \quad \Delta \phi = \phi_1 - \phi_2. \quad (5.4)$$

Uzmemo li zbog jednostavnosti  $\phi_1 = \phi_2$ , amplituda polja koje nastaje interferencijom dvaju valova jest

$$E = 2E_0 \cos \left[ k \frac{\Delta s}{2} \right] = 2E_0 \left[ \pi \frac{\Delta s}{\lambda} \right] \quad (5.5)$$

(koristili smo  $k = 2\pi/\lambda$ ), dok za intenzitet vala vrijedi

$$I = 2I_0 \cos^2 \left[ \pi \frac{\Delta s}{\lambda} \right]. \quad (5.6)$$

$$\text{Maksimumi:} \quad \frac{\Delta s}{\lambda} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Minimumi:} \quad \frac{\Delta s}{\lambda} = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \dots$$

### 5.3 Youngov pokus

$$\Delta s = d \sin \alpha = d \frac{y}{D}$$

$$\text{Maksimumi:} \quad y = \frac{D}{d} m \lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$